CONTRÔLE CONTINU DU 12 DÉCEMBRE 2018

Ex. 1 :

(1) $\varphi(e_i) = e_j$ avec $j \equiv i+1 \pmod n$, $j = 1, \dots, n$.

$\varphi^2(e_i) = e_j$ avec $j \equiv i+2 \pmod n$, $j = 1, \dots, n$

$\vdots$

$\varphi^n(e_i) = e_j$ avec $j \equiv i+n \pmod n$

$\Rightarrow j = i$

$\Rightarrow \varphi^n = id.$

(2) $(\omega^k)^n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right)^n = \exp(2\pi i k) = 1.$

(3) ω^k pour $k = 0, \dots, n-1$ sont deux à deux distinctes

Donc $X^n - 1$ est scindé à racines simples.

(4) $\varphi(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) = (\omega^{n-1}, 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-2})$

$= \underbrace{\omega^{n-1}}_{\omega^n = 1} (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$

(5) $\varphi(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(n-1)}) = (\omega^{k(n-1)}, 1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(n-2)})$

$= \omega^{k(n-1)} (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(n-1)})$

Or, $\omega^{k(n-1)} = \frac{\omega^{kn}}{\omega^k} = \omega^{-k}$

donc $1, \omega^{n-1}, \omega^{2(n-1)}, \dots, \omega^{(n-1)(n-1)}$ sont deux à deux distinctes. Les vecteurs

$v_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(n-1)})$

forment une base de vecteurs propres.

Ex. 2

(1)

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2-X & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -X & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$L_1 - L_4 \to L_1$

$$= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 & X-2 \\ 1 & 2-X & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -X & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$C_1 + C_4 \to C_4$

$$= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & 3 & -3 \\ 1 & -4 & -X & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ -4 & -X & 6 \\ 0 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$L_2 + 2L_1 - 3L_3 \to L_2$

$$= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ -2X & -X & 3X \\ 0 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= X(X-2) \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$C_3 + 3C_2 \to C_3$

$C_1 - 2C_2 \to C_1$

$$= X(X-2) \begin{vmatrix} -X-4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 6-X \end{vmatrix}$$

$$= X(X-2)\left[(X-6)(X+4)+24\right] = X(X-2)\left[X^2-2X\right]$$

$$= X^2(X-2)^2$$

(2) Les valeurs propres de A sont $0, 2$ avec multiplicité algébrique 2.

(3) $\ker(A)$

$$A \xrightarrow[\substack{L_3 - L_4 \to L_3}]{\substack{L_1 - 3L_4 \to L_1 \\ L_2 - L_4 \to L_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \ker A = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} +2 \\ 3 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$\ker(A - 2\,id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{\substack{L_2 - L_1 \\ L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 - 2L_2 \to L_1 \\ \frac{L_3}{+4} + L_2 \to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ker(A - 2\,id) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) $M_A(X) = (X-2)^2 X^2 \Longrightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

(5)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 0 & 8 \\ 4 & -8 & 0 & 8 \\ 4 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{L_1 - L_2}{4} \to L_1 \\ \frac{L_2}{4} \to L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad v_0 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 & 16 \\ 0 & -12 & -12 & 24 \\ 0 & 8 & 4 & -12 \\ 0 & -8 & -8 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker (A-2id)^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right). \qquad V_2 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On aurait pu remarquer, sans faire de calculs, que la troisième colonne de A est dans le noyau de A. Ceci entraîne que la troisième colonne de A^2 est nulle. Donc $e_3 \in \ker(A^2)$.

Par le même raisonnement $e_1 \in \ker((A-2id)^2)$.

(6) Dans la base

$$w_1 = Ae_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\2\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3 = (A-2id)e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad w_4 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La matrice de l'application linéaire $x \mapsto Ax$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$