Contrôle continu du 17 octobre 2018

Exercice 1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les sous-espaces affines $\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{P}_\lambda$ de $\mathbb{R}^3$ donnés par les équations suivantes :

$$\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x - 2z = 2 \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad \mathcal{P}_\lambda : x + (\lambda-2)y = 1.$$

1. Trouver un point $A \in \mathcal{D}_\lambda$ et donner une base de l'espace directeur de $\mathcal{D}_\lambda$.
2. Faire de même pour $\mathcal{P}_\lambda$.

On considère les matrices

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, calculer le rang de M_λ en fonction de λ.
4. Faire de même pour N_λ.
5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $\operatorname{rg} M_\lambda \leq 2$, trouver une base du noyau de M_λ.
6. Déterminer les nombres réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\mathcal{D}_\lambda \cap \mathcal{P}_\lambda$ est vide. (Indication : l'intersection est non vide si et seulement $\operatorname{rg} M_\lambda = \operatorname{rg} N_\lambda$.) Dans ce cas est-ce que $\mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont parallèles ?

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse A^{-1} de A.

Soient $e_1, \ldots, e_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ les colonnes de A et

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier pourquoi $\mathcal{R} = (P, v_1, \ldots, v_4)$ est un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$.
3. Écrire les coordonnées de $O + e_1, \ldots, O + e_4$ dans le repère $\mathcal{R}$.

On considère le sous-espace affine $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$ passant par P et d'espace directeur $E = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$.

4. Trouver une base de l'orthogonal $E^\perp$ de E.
5. Déterminer des équations pour $\mathcal{E}$.