Feuille de TD n°5 : Réduction des endomorphismes et des matrices II

Exercice 1 (Racine carrée d'une matrice complexe)**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer J^2e_i, J^3e_i et J^4e_i.

2) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4.

3) On suppose qu'il existe une matrice $A \in M_4(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?

4) Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 2. Calculer la décomposition en espaces caractéristiques puis trigonaliser les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Pour B, cf. exercice 10 de la feuille de TD 4). A l'aide de ces décompositions, calculer A^8 et B^9.

Exercice 3. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel V de dimension finie et vérifiant $E \oplus F = V$. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on appelle *affinité* de base E, de direction F et de rapport α, l'application linéaire $f : V \to V$ qui à un vecteur $x \in V$, écrit sous la forme $x = y + z$, $y \in E$, $z \in F$ associe $f(x) = y + \alpha z$.

1. Faire un dessin dans le cas $V = \mathbb{R}^2$.
2. Soit f une affinité de rapport α. Montrer que $f^2 = (1 + \alpha)f - \alpha\,\mathrm{id}_V$
3. Réciproquement soit g un endomorphisme de V vérifiant $g^2 = (\alpha + 1)g - \alpha\,\mathrm{id}_V$.
   (a) Montrer que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres possibles.
   (b) Montrer que g est une affinité vectorielle de rapport α ayant pour base et direction des espaces propres de g que l'on précisera.

Exercice 4 (Classes de similitude)**.**

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $(X - \lambda)^2$ pour un certain réel λ. Montrer que A est semblable soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Il y a donc deux classes de similitude de de matrices ayant $(X - \lambda)^2$ pour polynome caractéristique.
2. Combien y a-t-il de classes de similitude de matrices de $M_4(\mathbb{R})$ admettant $(X-1)^2(X-2)^2$ pour polynôme caractéristique ?
3. Combien y a-t-il de classes de similitude de matrices $A \in M_5(\mathbb{R})$ vérifiant l'identité $A^2 = 3A - 2I_5$? (*Indication :* commencer par montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.)

Exercice 5.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme diagonalisable et $E \subset V$ un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que la restriction $u_E : E \to E$ est aussi diagonalisable.
2. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que l'on peut les diagonaliser dans une même base. (*indication :* à l'aide de l'exercice 2 de la feuille 4, se ramener au cas où l'un des deux endomorphismes est une homothétie.)

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure par bloc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si B est diagonalisable alors nécessairement $A = 0$.

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. Considérons à présent le cas général d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & F \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ avec } C \in M_p(\mathbb{R}), F \in M_{p,q}(\mathbb{R}), E \in M_q(\mathbb{R}).$$

   (a) Justifer que $P(M)$ est également triangulaire supérieure par bloc. Quels sont ses blocs diagonaux ?

   (b) Montrer que si M est diagonalisable, alors C et E sont diagonalisables.
3. Considérons maintenant le cas qui nous intéresse : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que B est diagonalisable. Montrer qu'il existe des réels $d_1, \ldots, d_n$ et une matrice P inversible tels que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \ldots, d_n$ comme coefficients diagonaux. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

   Expliciter Q en fonction de P.
4. Montrer que B est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide des questions 1 et 2, montrer que $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En déduire que $A = 0$.