Endomorphismes auto-adjoints

Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$.

déf. Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Un adjoint à u (par rapport à φ) est une application linéaire $u^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tq

$$\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Prop. 1) Étant donné $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire il existe un seul adjoint u^* à u. On parlera donc de l'adjoint à u.

2) $A = \mathrm{Mat}(u)$ dans la base canonique
$J = \mathrm{Mat}(\varphi)$ ————————

Alors la matrice A^* de u^* dans la base canonique est :

$$A^* = J^{-1}\,{}^tA\,J$$

démo. Pour l'existence, soit u^* l'appication linéaire

$$x \longmapsto J^{-1}\,{}^tA\,J\,x.$$

$$\varphi(u(x), y) = {}^tx\,{}^tA\,J\,y \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ non dég.} \\ J \text{ inversible}}}{=} {}^tx\,J\,J^{-1}\,{}^tA\,J\,y$$

$$= \varphi(x, J^{-1}\,{}^tA\,J\,y) = \varphi(x, u^*(y)).$$

Il reste à montrer l'unicité. Soit v_1, v_2 des adjoints à u. Donc,

$$\varphi(x, v_2(y)) = \varphi(u(x), y) = \varphi(x, v_1(y))$$

$$\Longrightarrow \varphi(x, v_1(y)) - \varphi(x, v_2(y)) = 0$$

$$\| \ \varphi \text{ bilinéaire}$$

$$\varphi(x, v_1(y) - v_2(y)) = 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On fixe $y \in \mathbb{R}^n$ et on pose $z = v_1(y) - v_2(y) = 0$.

On a $\quad \varphi(x, z) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\ker \varphi = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x, w) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \}$$

$\Longrightarrow z \in \ker \varphi$, mais $\ker \varphi = 0$ car φ non dégénérée

$\Longrightarrow z = 0$, i.e. $v_1(y) = v_2(y)$.

En particulier, $v_1(y) = v_2(y) \ \ \forall y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow v_1 = v_2$. $\square$

Exemple : φ = produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$
$J = \mathrm{Mat}(\varphi)$

$$(x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

$$(e_i \mid e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad J\,((e_i \mid e_j))_{ij} = id.$$

$A \in M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow$ adjoint de A :

$$A^* = (id)^{-1}\,{}^tA\ id = {}^tA.$$

En effet, $(Ax \mid y) = {}^tx\,{}^tA\,y = (x \mid {}^tA\,y)$.

Dans ce cas : adjoint = transposée.

déf. φ forme bilinéaire symétrique
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ application linéaire
On dit que u est auto-adjoint si $u = u^*$.

Thm. Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Tout endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Thm (version matricielle) Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée (par rapport au produit scalaire standard).

Autrement dit, pour toute matrice symétrique A il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPP = id$ t.q.

$$PAP^{-1} \text{ est diagonale.}$$

Exemples ($n=2$)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ symétrique.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ b & c-X \end{vmatrix} = (a-X)(c-X)-b^2$$

$$= X^2 - Tr(A)\cdot X + \det A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2)$$

$$= a^2 + \cancel{2ac} + c^2 - \cancel{4ac} + 4b^2$$

$-2ac$

$$= (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \longrightarrow \text{valeurs propres sont réelles.}$$

avec égalité $\Longleftrightarrow$ $a=c$ et $b=0$.

- $\Delta > 0 \Longrightarrow$ les deux valeurs propres de A sont réelles et distinctes ($P_A(X)$ scindé à racines simples).
  $\Longrightarrow A$ diagonalisable.
- $\Delta = 0 \Longrightarrow a=c,\ b=0$
  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\cdot id \Longrightarrow$ diagonale.

$*$ A anti-symétrique (${}^tA = -A$).

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$A = -{}^tA \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -a \Longleftrightarrow a=0. \\ c = -b \\ d = -d \Longleftrightarrow d=0 \end{cases} \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

$P_A(X) = X^2 + b^2$ $\Delta = -4b^2 \leq 0$

avec égalité $\Longleftrightarrow b=0$.

- $b = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc diagonale (A est symétrique)
- $b \neq 0 \Longrightarrow$ les valeurs propres de A sont $\pm ib$. ($i^2=-1$).
  $\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Rmq : $P_A(X) = (X+ib)(X-ib)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Lemme : Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auto-adjoint.
Si $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre pour u (i.e. $u(v) = \lambda v$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$), alors $H = \mathrm{Vect}(v)^\perp$ est stable sous u (i.e. $x \in H \Rightarrow u(x) \in H$).

démo. $x \in H \iff (x|v) = 0$.

Soit $x \in H$. On a :

$$(u(x)|v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{auto-adjoint}}}{=} (x|u(v)) \underset{\substack{\uparrow \\ u(v)=\lambda v}}{=} (x|\lambda v) = \lambda (x|v) = 0$$

$\Longrightarrow u(x) \in H$. $\square$

$\boxed{\text{Lemme crucial}}$: Si u est auto-adjoint, il a une valeur propre réelle.

démo du Thm : On raisonne par récurrence sur n.

$n=1$: toute matrice est diagonale !!

$n-1 \Rightarrow n$: Par le lemme cruciale, u a une valeur propre réelle λ_n. Il y a donc $v_n \in \mathbb{R}^n$ tq

$$u(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Quitte à diviser v_n par sa norme, on peut supposer $\|v_n\| = 1$. On considère :

$$H = \mathrm{Vect}(v_n)^\perp.$$

- $u : H \longrightarrow H$ (premier lemme).
  $x \longmapsto u(x)$
- $(u(x)|y) = (x|u(y))$ $\forall x, y \in H$ parce que c'est vrai pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\dim H = n - \dim \mathrm{Vect}(v_n) = n-1$.

Donc $u : H \to H$ est un endomorphisme auto-adjoint d'un espace de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $v_1, \dots, v_{n-1}$ de H tq $u(v_i) = \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Or $v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ parce que

$$(v_i|v_j) = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq n-1,\ j = n \quad H = \mathrm{Vect}(v_n)^\perp \\ 0 & 1 \leq j \leq n-1,\ i = n \\ 0 & 1 \leq i, j \leq n-1,\ i \neq j \leftarrow v_1, \dots, v_{n-1} \text{ base orthonormée} \\ 1 & i = j = n \\ 1 & 1 \leq i = j \leq n-1 \end{cases}$$

et de plus $u(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

$\Longrightarrow v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée de vecteurs propres. $\square$

Il reste à montrer le Lemme Cruciale :

Thm : Sur $\mathbb{C}$ tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$ est scindé.

e.g. tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ admet une "racine carrée" w (i.e. $w^2 = z$).

$$z = r e^{i\theta}, \quad \underset{\text{réel}}{r > 0}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$w_\pm = \pm\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad (w_+)^2 = (w_-)^2 = z.$$

$$P(x) = x^2 - z = (x - w_+)(x - w_-).$$

En particulier, tout polynôme de degré 2 est scindé

$$P(x) = aX^2 + bX + c \qquad a \neq 0$$

solutions : $\dfrac{-b \pm w}{2a}$ où $w^2 = b^2 - 4ac$.

w existe toujours !

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$\bar{z} = x - iy \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad 0 \leq |z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z}.$

$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} \geq 0$$

$$\|z\| = 0 \iff |z_i| = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \iff z_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$$
$$\iff z = (0, \ldots, 0) = 0 \in \mathbb{C}^n$$

$w, z \in \mathbb{C}^n$

$$(w|z) := {}^t\bar{w}\, z \implies \|z\|^2 = (z|z).$$

$$= (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \cdots + \bar{w}_n z_n.$$

démo du Lemme Cruciale : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. $P_A(x) = \det(A - X \cdot id) \in \mathbb{R}[x]$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $P_A(\lambda) = 0$ (ça existe par le Thm plus haut.)

Soit $z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre pour λ :

$$Az = \lambda z.$$

$$(Az|z) = {}^t\overline{(Az)}\, z = \overline{{}^tz\,{}^tA}\, z$$

$$\underset{\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}}{=} {}^t\bar{z}\, {}^t\bar{A}\, z = {}^t\bar{z}\, {}^tA\, z$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$\bar{a} = a \iff a \in \mathbb{R}$

$[a = b + ic \quad \bar{a} = b - ic$
$a = \bar{a} \iff c = 0]$

$$\underset{{}^tA = A}{=} {}^t\bar{z}\, A\, z = (z|Az)$$

$$\lambda\, {}^t\bar{z}\, z = (Az|z) = (z|Az) = {}^t\bar{z}\, \lambda z = \lambda (z|z) = \lambda \|z\|^2.$$

$$\bar{\lambda}(z|z) = \bar{\lambda}\|z\|^2.$$

$$\implies \bar{\lambda}\|z\|^2 = \lambda \|z\|^2$$

$$\underset{z \neq 0}{\implies} \bar{\lambda} = \lambda. \implies \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \square$$