Rappel : Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée ; si $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, il existe P tq ${}^tPP = id$

et $\underbrace{P^{-1}}_{{}^tP = P^{-1}} A P$ est diagonale

$$P^{-1}AP = {}^tPAP$$

1) Cela revient à dire que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs orthogonaux pour A.

$$P = (v_1, \dots, v_n).$$

$${}^tPAP = (d_{ij}) \qquad d_{ij} = {}^tv_i A v_j.$$

${}^tPAP$ diagonale $\iff d_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$\iff {}^tv_i A v_j = 0$ si $i \neq j$.

$\iff v_i, v_j$ orthogonaux pour A pour $i \neq j$.

En d'autres termes, on a montré qu'il existe une base orthonormée pour le produit scalaire standard et qui est orthogonale par rapport à la forme quadratique induite par la matrice symétrique A.

2) La signature de A est

$$p = \#\{i : {}^tv_i A v_i > 0\}$$

$$q = \#\{i : {}^tv_i A v_i < 0\}$$

parce que $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale pour A.

Or $Av_i = \lambda_i v_i$ car v_i est un vecteur propre pour A. Donc,

$${}^tv_i A v_i = {}^tv_i(\lambda_i v_i) = \lambda_i \, {}^tv_i v_i = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{> 0}$$

$$\implies \text{signe}({}^tv_i A v_i) = \text{signe}(\lambda_i).$$

Cor : La signature d'une matrice symétrique A de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ est (p,q) où

$p = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ = nombre de valeurs propres > 0.

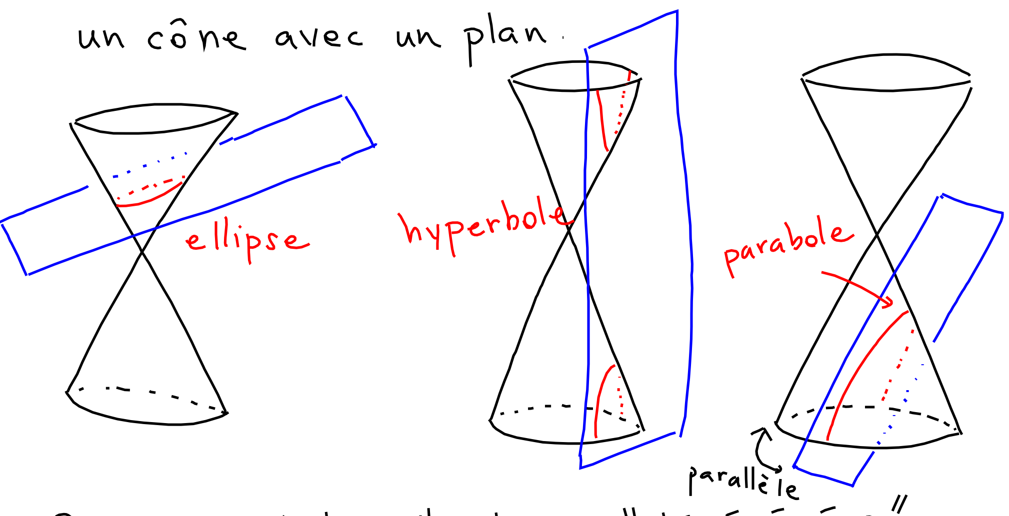
$q = \#\{i : \lambda_i < 0\}$ = nombre de valeurs propres < 0.

Rmq : Calculer les valeurs propres est en générale beaucoup plus difficile que calculer la signature en écrivant la forme quadratique comme somme de carrés.

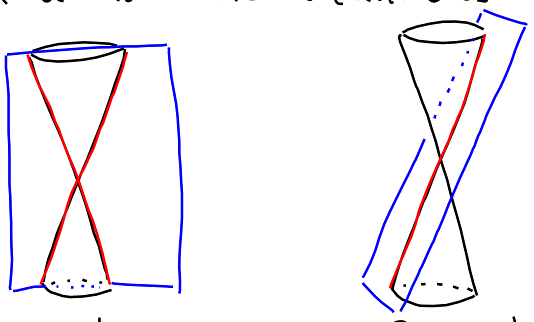
Coniques

Il y a trois types de coniques
- ellipse
- hyperbole
- parabole

Elles s'obtiennent toutes en tranchant un cône avec un plan.



On a aussi des situations "dégénérées"



On peut décrire un cône dans $\mathbb{R}^3$ par l'équation

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Un plan dans $\mathbb{R}^3$ est le translaté d'un plan vectoriel $\mathrm{Vect}(u,v)$ de $\mathbb{R}^3$ par un point P.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Un point du plan est

$$x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$$

$$y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$$

$$z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Quand on impose la relation $z^2 = x^2 + y^2$

$$(p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3)^2 = (p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1)^2 + (p_2 + \lambda u_2 + \mu u_2)^2$$

On remarque juste que c'est un polynôme de degré 2 en les variables λ, μ. On va donc s'intéresser au polynôme de degré 2 en 2 variables.

__déf__: Une __conique__ est un polynôme en deux variables, de deg 2, non nul, à facteur multiplicatif près (i.e. f et λf avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont la même conique.)

Un polynôme de deg 2, en deux var est de la forme

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f =: Q(x,y)$$

Pour étudier le lieu où Q s'annule,

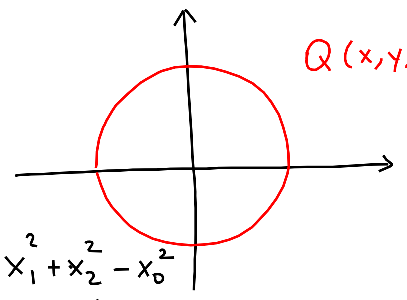
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) = 0\}$$

on va "homogénéiser" Q :

$$x_0^2\, Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_1 x_2 + d x_1 x_0 + e x_2 x_0 + f x_0^2 . = \tilde{Q}(x_0, x_1, x_2).$$

C'est une forme quadratique en les variables x_0, x_1, x_2.

__Exemples__: (1) $x^2 + y^2 - 1 = Q(x,y)$



$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$

La matrice de $\tilde{Q}$:

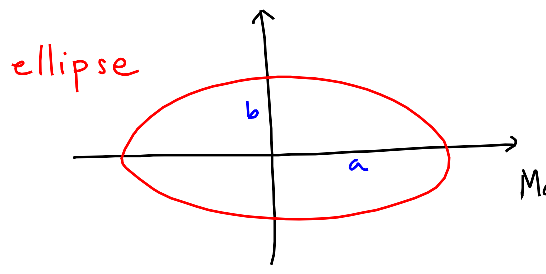
$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sign}(\tilde{Q}) = (2,1)$.

$\mathrm{rg}(\tilde{Q}) = 3$ bien déf.

__Rmq__: on a dit que Q et $-Q$ sont la même conique. Donc la signature dépend d'un choix, elle n'est pas bien définie pour une conique.

(2) $Q(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$

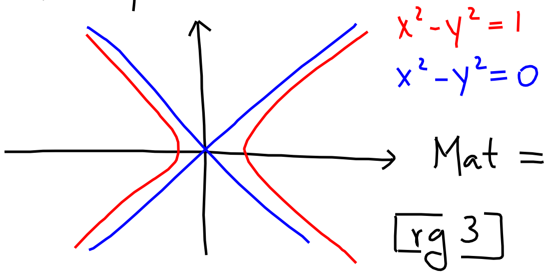


$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - x_0^2$$

$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & a^{-2} & \\ & & b^{-2} \end{pmatrix}$$

même signe

(3) $Q(x,y) = x^2 - y^2 - 1$

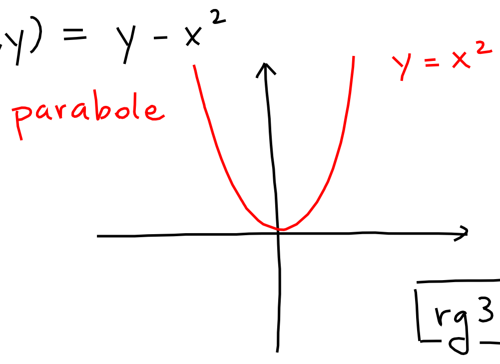


$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathrm{rg}\ 3}$

signe différent

(4) $Q(x,y) = y - x^2$



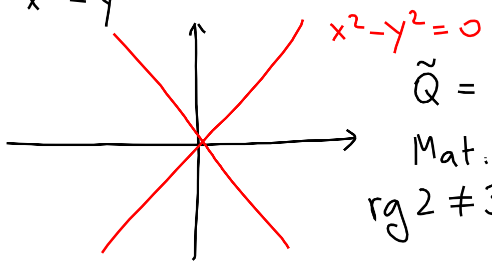
$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2 - x_1^2$$

Matrice

$$\begin{pmatrix} & & \frac{1}{2} \\ & -1 & \\ \frac{1}{2} & & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathrm{rg}\,3}$

(5) $Q(x,y) = x^2 - y^2$

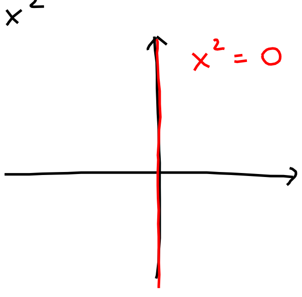


$\tilde{Q} = x_1^2 - x_2^2$

Mat. $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}\ 2 \neq 3$

(6) $Q(x,y) = x^2$



$\tilde{Q} = x_1^2$

Mat $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

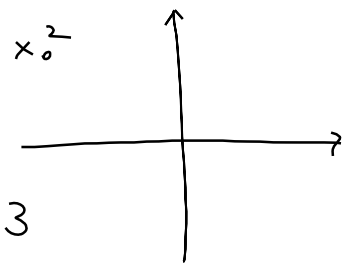
rg 1.

(7) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1$

$\tilde{Q} = x_1^2 + x_2^2 + x_0^2$

Mat $\tilde{Q}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rg}\ 3$$



$x^2 + y^2 + 1 = 0$

$\iff x^2 + y^2 = -1$

il n'y a pas de points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $x^2 + y^2 = -1$!

déf : Une conique Q est non dégénérée si la forme quadratique est non dég ($\mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}(\tilde{Q}) = 3$).

La forme quadratique $\tilde{Q}$ est de la forme

$$a x_0^2 + b x_0 x_1 + c x_0 x_2 + d x_1^2 + e x_1 x_2 + f x_2^2$$

$$\mathrm{Mat}(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & d & \frac{e}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

A' = $\begin{pmatrix} d & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$: matrice de la forme quadratique $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$

déf : Soit Q une conique non dégénérée. On dit que Q est :

* une ellipse si $\det A' > 0$;
* une hyperbole si $\det A' < 0$;
* une parabole si $\det A' = 0$.

Rmq : Cette définition ne dépend pas du multiple du polynôme qu'on choisi. En effet la matrice associée à λQ ($\lambda \neq 0$) est $\lambda \mathrm{Mat}(\tilde{Q})$ et la matrice 2×2 en bas à droite est $\lambda A'$.

$$\underset{A' \in M_2(\mathbb{R})}{\det(\lambda A')} = \overset{>0}{\lambda^2} \det(A') \implies \text{signe} \det(\lambda A') = \text{signe} \det(A')$$

Exemples : (1) $Q(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$

$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - x_0^2$$

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \frac{1}{a^2} & \\ & & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

$\det A' = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$

(2) $Q(x,y) = x^2 - y^2 - 1$

$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_0^2$$

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A' = -1 < 0$.

(3) $Q(x,y) = y - x^2$

$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2 - x_1^2$$

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = -x_1^2$$

$$\begin{pmatrix} & & \frac{1}{2} \\ & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

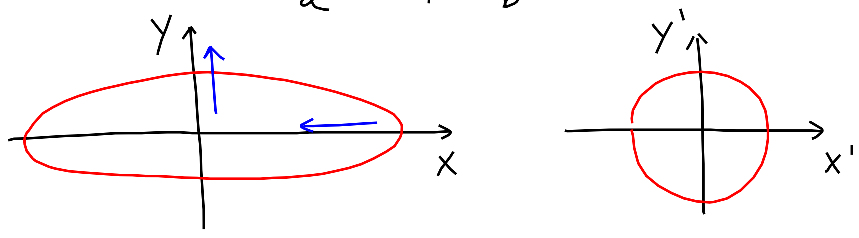
$\det A' = 0$

Thm : À un changement de coordonnées près sur $\mathbb{R}^2$, on a :

* une ellipse peut s'écrire avec équation $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse avec points) ou $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (ellipse sans points)
* une hyperbole peut s'écrire avec équation $x^2 - y^2 = 1$
* une parabole peut s'écrire avec équation $y = x^2$.

Rmq : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ devient $x'^2 + y'^2 = 1$ juste en posant

$$x' = \frac{x}{a} \qquad y' = \frac{y}{b}.$$



On verra plus tard qu'en choisissant un changement de coordonnées isométrique on peut éviter ce problème.

Rmq : Dans l'énoncé le changement de coordonnées est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

matrice inversible