<u>Rappel</u> : Conique = équation de degré 2 en 2 variables à scalaire non nul près.

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0$$

$$\downarrow \text{homogénéiser}$$

$$\tilde{Q}(x_0, x_1, x_2)$$

$$(*) \quad a \underline{x_1^2}_{x_0^2} + b \underline{x_2^2}_{x_0^2} + c \, \frac{x_1}{x_0} \frac{x_2}{x_0} + d \frac{x_1}{x_0} x_0 + e \frac{x_2}{x_0} x_0 + f \frac{x_0^2}{x_0^2} = 0.$$

- (x_0, x_1, x_2) solution avec $x_0 \neq 0$

$\longrightarrow \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ solution de l'équation de départ

- si $(0, x_1, x_2)$ est solution de $(*)$, on dit que c'est un point à l'infini de $(*)$.

L'équation $(*)$ est l'équation du cône isotrope de la forme

$$A = \begin{pmatrix} f & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & a & \frac{c}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \longleftarrow \text{matrice de } \tilde{Q}$$

$\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \longleftarrow$ matrice de $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$. $\longleftarrow A_\infty$

On a dit que :

- $\tilde{Q}$ est non dégénérée si $\operatorname{rg} A = 3$

$$\det(A_\infty) \begin{cases} > 0 \longrightarrow \tilde{Q} \text{ ellipse} \\ = 0 \longrightarrow \tilde{Q} \text{ parabole} \\ < 0 \longrightarrow \tilde{Q} \text{ hyperbole} \end{cases}$$

<u>Rmq</u> : $\det(A_\infty)$ est $-$discriminant de $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$.

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = a x_1^2 + c x_1 x_2 + b x_2^2$$

$$\det(A_\infty) = ab - \frac{c^2}{4}$$

Si $a \neq 0$: $\tilde{Q}(0, x_1, x_2) =$
$\Delta \geqslant 0$

$$\left(x_1 - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} x_2\right)\left(x_1 - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} x_2\right)$$

$$\Delta = -4 \det(A_\infty).$$

- Si $a = 0$: $\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = x_2 (c x_1 + b x_2)$.

$\Downarrow$

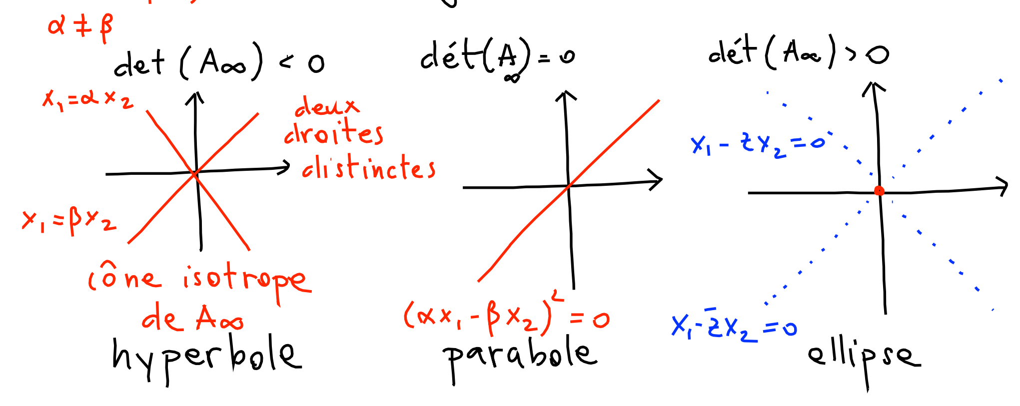
$\Delta \geq 0$.

<u>Rmq</u> : La forme quadratique $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$

$(x_1 - z x_2)(x_1 - \bar{z} x_2)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: est déf > 0 ou déf < 0 si $\det(A_\infty) > 0$

$(\alpha x_1 - \beta x_2)^2$: est dégénérée si $\det(A_\infty) = 0$

$(x_1 - \alpha x_2)(x_1 - \beta x_2)$, $\alpha \neq \beta$: est de signature $(1,1)$ si $\det(A_\infty) < 0$



Théorème: Soit Q une conique non dégénérée.

Il existe des coordonnées x', y',

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

matrice 2×2 inversible

t.q. Q s'écrit sous la forme

$$Q(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 & \text{si } Q \text{ hyperbole} \\ y - x^2 & \text{si } Q \text{ parabole} \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{si } Q \text{ ellipse avec points réels} \\ x^2 + y^2 + 1 & \text{si } Q \text{ ellipse sans points réels.} \end{cases}$$

Rmq: le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

peut être récrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & \boxed{} & \\ u & & A \end{pmatrix}}_{B=} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

c'est une matrice B 3×3 inversible t.q.

$$(1\ 0\ 0)B = (1\ 0\ 0).$$

Cela est équivalent à trouver une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ inversible t.q.

$H = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 = 0 \}$ est stable sous B, i.e.

$$x \in H \Longrightarrow Bx \in H.$$

En effet, $x_0 = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H = \{ x \mid (1\,0\,0)x = 0 \}$

donc H est stable sous B si et seulement si

$$\big((1\,0\,0)x = 0 \Rightarrow (1\,0\,0)Bx = 0 \big)$$

En particulier, si $(1\,0\,0)B = (1\,0\,0)$ on a

$$(1\ 0\ 0)Bx = (1\ 0\ 0)\, x \underset{x \in H}{=} 0$$

Cela revient encore que les colonnes de B forment une base de $\mathbb{R}^3$ tq les deux dernières colonnes forment une base de H.

$\underline{\text{démo}}$. Puisque dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole on veut des équations homogènes du style $\pm x_0^2 \pm x_1^2 \pm x_2^2 = 0$ on doit trouver une base u_1, u_2, u_3 t.q.

- u_1, u_2, u_3 orthogonale pour la forme quadratique Q.
- u_2, u_3 forment une base de H.

$\underline{\text{Hyperbole}}$: $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_0 = 0 \right\} = \text{Vect}(e_2, e_3)$

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = (x_1 - \alpha x_2)(x_1 - \beta x_2)$$

avec $\alpha \neq \beta$.

$\dim H^\perp = 3 - 2 = 1$

$H^\perp = \text{Vect}\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \notin H$ parce que $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$ est non dégénérée

$= \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ t_1/t_0 \\ t_2/t_0 \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } \mathcal{B}}\right)$ i.e. $t_0 \neq 0$.

Pour le choix d'une base de H on prend
$0 \neq u_2 \in H$ t.q. $\tilde{Q}(u_2) \neq 0$ $\quad u_2 \notin \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \cup \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$
$0 \neq u_3 \in H \cap \text{Vect}(u_2)^\perp \rightarrow \tilde{Q}(u_3) \neq 0$

$$\tilde{Q}(y_2 u_2 + y_3 u_3) = y_2^2 \tilde{Q}(u_2) + y_3^2 \tilde{Q}(u_3)$$

On a supposé que $\tilde{Q}$ a signature $(1,1)$
On peut supposer $\tilde{Q}(u_2) = 1$ et $\tilde{Q}(u_3) = -1$.
D'autre côté on a $\underbrace{\tilde{Q}(u_1)}_{a} \neq 0$. On a trouvé que $\tilde{Q}$ a équation

$x^2 - y^2 = a \longrightarrow a > 0 \quad \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{a}}\right)^2 = 1$

$\longrightarrow a < 0 \quad \left(\frac{y}{\sqrt{-a}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{-a}}\right)^2 = 1$

Le cas de l'ellipse est similaire : l'unique différence est que $\tilde{Q}(0, x_1, x_2)$ est de signature $(2,0)$ ou $(0,2)$
On trouvera une équation du style

sign $\tilde{Q} = (3,0)$ ou $(0,3)$: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ellipse sans points réels
sign $\tilde{Q} = (2,1)$ ou $(1,2)$: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ellipse avec points réels.

$\underline{\text{Exemple}}$: $x^2 + y^2 - 10xy + 4x - 4y + \frac{5}{3} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_\infty = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 + 5L_3}{\overset{L_1 + 2L_3}{=}} \begin{vmatrix} -\frac{7}{3} & -8 & 0 \\ -8 & -24 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ A est non dégénérée.

$\det(A_\infty) = -24 < 0 \longrightarrow Q$ hyperbole !

Centre : $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ t.q. $H^\perp = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

$(1 \;\; 0 \;\; 0)\, A = \left(\frac{5}{3} \;\; 2 \;\; -2\right)$

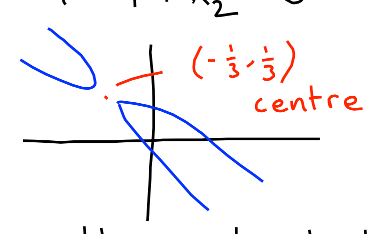
$H = \text{Vect}(e_2, e_3)$

$H^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; {}^t e_2 A x = 0 \text{ et } {}^t e_3 A x = 0 \right\}$

$$\begin{cases} {}^t e_2 A = (2 \;\; 1 \;\; -5) \longrightarrow 2x_0 + x_1 - 5x_2 = 0 \\ {}^t e_3 A = (-2 \;\; -5 \;\; 1) \longrightarrow -2x_0 - 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0 + x_1 - 5x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 6x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$H^\perp = \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{= u_1}$



On va trouver une base orthogonale de H :

$$\tilde{Q}(0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 x_2$$

solutions : $5 \pm \sqrt{25 - 1} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

Les droites isotropes de $\tilde{Q}$ dans H sont
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 + 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 - 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$

On choisit u_2 t.q.
$u_2 \notin \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 + 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 \notin \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 - 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On prend par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2$

Or u_3 est un générateur de $\text{Vect}(u_2)^\perp \cap H$.

${}^t u_2 A = (2 \;\; 1 \;\; -5) \longrightarrow 2x_0 + x_1 - 5x_2 = 0$
$H = \{x_0 = 0\} \longrightarrow x_0 = 0$

$\longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 5x_2 \end{cases} \rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La base qu'on a trouvé est :

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ces trois vecteurs ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$, mais ils sont orthogonaux pour A.

$$\tilde{Q}(y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) = y_1^2 \tilde{Q}(u_1) + y_2^2 \tilde{Q}(u_2) + y_3^2 \tilde{Q}(u_3)$$

$$\tilde{Q}(u_1) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(-\frac{1}{3}\right) - 4\frac{1}{3} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$\tilde{Q}(u_2) = 1$

$\tilde{Q}(u_3) = 5^2 + 1 - 10 \cdot 5 = -24$.

La nouvelle équation pour $\tilde{Q}$ est :

$$\frac{1}{3} + x^2 - 24y^2 = 0 \longrightarrow 24y^2 - x^2 = \frac{1}{3}.$$