Dernière fois : Forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (à n variables)

$$Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\;=\; {}^tX A X$ où A est une matrice symétrique.

Déf. La forme bilinéaire associée à Q est

$$\varphi(X,Y) = \frac{1}{2}\left[Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y) \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[{}^t(X+Y) A (X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY \right]$$

$$\underbrace{{}^t(X+Y)}_{{}^tX+{}^tY} A (X+Y) = ({}^tXA + {}^tYA)(X+Y)$$
$$= {}^tXAX + {}^tXAY + {}^tYAX + {}^tYAY$$

$${}^tYAX = \underbrace{(y_1,\dots,y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\underbrace{a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{n1}y_n}_{\sum_{i=1}^n a_{i1}y_i}, \sum_{i=1}^n a_{i2}y_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}y_i \Big) X$$

$$= x_1\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}y_i\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^n a_{i2}y_i\right) + \dots + x_n\left(\sum_{i=1}^n a_{in}y_i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) y_i \overset{(*)}{=} \underset{{}^tXAY}{\overset{?}{\|}}$$

On a besoin que dans la somme $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ le terme a_{ij} soit a_{ji} pour conclure que ${}^tXAY \overset{?}{=} {}^tYAX$. Mais A est symétrique !!

Donc $a_{ji} = a_{ij}$ et on a

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) y_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{j1}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}x_j\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^tXAY.$$

Autre méthode pour vérifier ${}^tYAX = {}^tXAY$ si A symétrique :
${}^tY$ = 1 ligne, n colonnes
A = n lignes, n colonnes.
X = n lignes, 1 colonne

$\underbrace{{}^tY}_{\substack{1 \text{ lignes} \\ n \text{ colonnes}}}AX$ = matrice 1×1, qui est la même chose qu'un nombre réel.

$$\Longrightarrow \; {}^t({}^tYAX) = {}^tYAX \quad \text{car c'est une matrice } 1\times 1$$
$$\overset{\|}{{}^tX\,{}^tA\,{}^t({}^tY)} = {}^tX\,{}^tA\,Y \underset{{}^tA = A}{=} {}^tXAY.$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad {}^tY = (y_1,\dots,y_n) \qquad {}^t({}^tY) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

Je reprends le calcul de

$$\varphi(X,Y) = \frac{1}{2}\left[Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y) \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[{}^t(X+Y)A(X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{{}^tXAX} + {}^tXAY \overset{=}{+} {}^tYAX + \cancel{{}^tYAY} - \cancel{{}^tXAX} - \cancel{{}^tYAY} \right] = \frac{1}{2}\, 2\, {}^tXAY$$
$$= {}^tXAY.$$

On a démontré la Formule de Polarisation :

$$\underset{\varphi(X,Y)}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\left[Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y) \right]}} = {}^tXAY = {}^tYAX.$$

Exemple :

(1) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(X,Y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Rmq : En général, si $\varphi(X,Y) = {}^tX A Y$ avec A symétrique, et

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ème ligne $= e_i$

$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-ème ligne $= e_j$.

$A = (a_{ij})$

$$\varphi(X,Y) = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ème pos}}}{1}, \dots, 0)\, A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-ème} \quad = a_{ij}$$

i-ème ligne
j-ème col

$$(0, \dots, 1, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

i-ème ligne de A.

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

On a trouvé une formule !

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \varphi(e_n, e_2) & \cdots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

(2) $Q(x_1, x_2) = \boxed{x_1^2}\boxed{- x_2^2}$

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(X,Y) = \underbrace{(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, -x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{x_1 y_1}\boxed{- x_2 y_2}$$

(3) $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(X,Y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_2, x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

Quelles propriétés a-t-elle φ ?

① $\varphi(\lambda X + \lambda' X', Y)$ $\quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $X, X', Y \in \mathbb{R}^n$

$$= {}^t(\lambda X + \lambda' X') A Y = (\lambda {}^tX + \lambda' {}^tX') A Y$$

$$= \lambda {}^tX A Y + \lambda' {}^tX' A Y = \lambda \varphi(X,Y) + \lambda' \varphi(X',Y)$$

Autrement dit, φ est linéaire dans la variable X.

② $\varphi(X, \mu Y + \mu' Y')$ $\quad \mu, \mu' \in \mathbb{R}$, $Y, Y', X \in \mathbb{R}^n$

$$= {}^tX A(\mu Y + \mu' Y') = \mu {}^tX A Y + \mu' {}^tX A Y'$$

$$= \mu \varphi(X,Y) + \mu' \varphi(X,Y').$$

Donc φ est linéaire aussi dans la variable Y.

③ $\varphi(X,Y) = {}^tXAY = {}^tYAX = \varphi(Y,X)$

C'est-à-dire que φ est symétrique dans les deux variables.

Déf : Une fonction
$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X, Y \longmapsto \varphi(X,Y)$$
est bilinéaire si elle satisfait les propriétés ①, ② et ③ ci-dessus.

On définit la matrice d'une application bilinéaire par $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

Si on fait cela :

1) A est symétrique : $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = a_{ji}$.

2) $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$

En particulier : la fonction $Q(X) = {}^tXAX = \varphi(X,X)$ est une forme quadratique à n variables et φ est la forme bilinéaire associée à Q.

Morale : formes quadratiques = formes bilinéaires

$${}^tXAX \longleftrightarrow {}^tXAY.$$

Interprétation du noyau :

Soit Q une forme quadratique à n variables, φ sa forme bilinéaire associée et $A = \mathrm{Mat}(Q)$.

Rappel : $\mathrm{Ker}\, Q := \mathrm{Ker}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Lemme : $\mathrm{Ker}\, Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$

démo : On va démontrer les deux inclusions de ces deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

① $\subseteq$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\, Q$, i.e. $Ax = 0$. On doit montrer que $\varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) = {}^tY A X \overset{AX=0}{=} {}^tY \cdot 0 = 0 .$$

$$\boxed{\mathrm{ker}\, Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x,y) = 0 \ \forall y\}}$$

② Soit $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$.
On doit montrer : $Ax = 0$.

$$0 = \varphi(x,y) = \varphi(y,x) = {}^tyAx \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$A x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 = \text{produit de la } 1^{\text{ère}} \text{ ligne de } A \text{ avec } x \\ 0 = \text{——— } 2^{\text{ème}} \text{ ———} \\ \vdots \\ 0 = \text{——— } n^{\text{ème}} \text{ ———} \end{pmatrix}$$

$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tyA = 1^{\text{ère}}$ ligne de A $\Big\}$ ${}^tyAx =$ produit de la $1^{\text{ère}}$ ligne de A avec x.
$\overset{\shortparallel}{0}$ par hypothèse

$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tyA = 2^{\text{ème}}$ ligne de A $\Big\}$ ${}^tyAx =$ ——— $2^{\text{ème}}$ ———
$\overset{\shortparallel}{0}$ par hyp.

$\vdots$

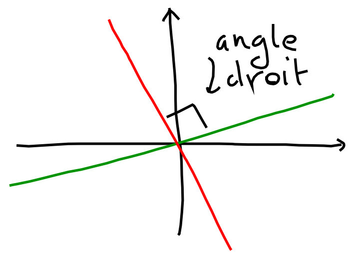
$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tyAx =$ produit n-ème ligne de A avec x.
$\overset{\shortparallel}{0}$

Super ! On a montré $Ax = 0$. $\square$

On pose $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$

$\Longrightarrow \mathrm{Ker}\, Q = \mathrm{Ker}\, \varphi$.

Orthogonal "= perpendiculaire"



On veut définir la notion d'espace "perpendiculaire" à un sous-espace donné (par exemple une droite). On va voir qu'étant fixée une forme quadratique (ou une forme bilinéaire) on peut définir la notion de "perpendiculaire", mais elle ne va pas toujours se comporter comme on s'imagine : pour distinguer, on dira orthogonale.

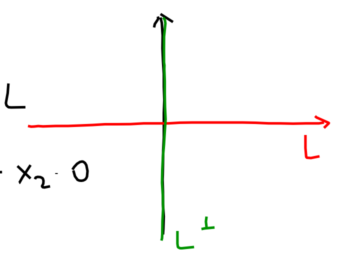
Def: Soit φ une forme bilinéaire et soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. L'orthogonal de V est

$$V^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,y) = 0 \quad \forall y \in V \}$$

Exemples: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(1) $L = \mathrm{Vect}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$x \in L^\perp \iff \varphi(x,y) = 0 \quad \forall y \in L$

$x = (x_1, x_2) \qquad \varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 \cdot 0$

$y = (y_1, 0) \qquad\qquad = x_1 y_1$

$\varphi(x,y) = 0 \iff x_1 y_1 = 0 \underset{y_1 \neq 0}{\implies} x_1 = 0.$

On a montré: $L^\perp \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(e_2)$.

C'est une égalité: si $x_1 = 0$, $\varphi(x,y) = x_1 y_1 = 0$

(2) $L = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$L^\perp \ni x \iff \varphi(x,y) = 0 \quad \forall y \in L$

$y \in L \iff y = \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\iff \varphi\left(x, \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \lambda\, \varphi\left(x, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \varphi\left(x, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = 0.$

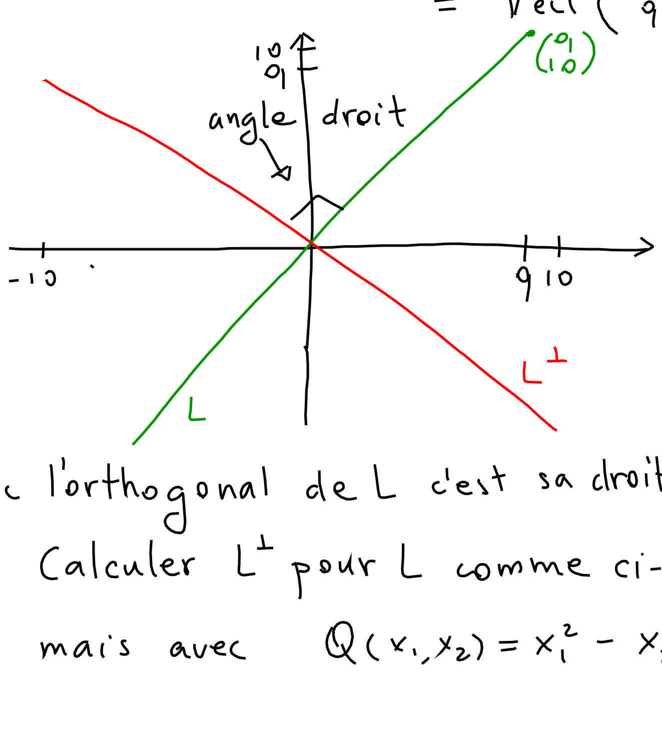
$\varphi(x,y) = {}^t x\, y \qquad (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} = 9x_1 + 10x_2 = 0.$

Par exemple, elle est engendrée par

$\{ (x_1, x_2) : 9x_1 + 10x_2 = 0 \}$

$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}$



Donc l'orthogonal de L c'est sa droite perpendiculaire

exo: Calculer $L^\perp$ pour L comme ci-dessus mais avec $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.