<u>Rappel</u> : Si φ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$

et $v_1, \dots, v_n$ une base, la matrice dans cette base

est $A = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \varphi(v_1,v_2) & \dots & \varphi(v_1,v_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi(v_n,v_1) & \dots & & \varphi(v_n,v_n) \end{pmatrix}$

La base $v_1, \dots, v_n$ est orthogonale si $\varphi(v_i,v_j) = 0$ $i \neq j$.

c-à-d : A est diagonale

Autrement dit $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$$Q(v) = \varphi(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \, \varphi(v_i,v_j)$$

$$= \varphi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v)$$

linéarité 1ère var.

$$= x_1 \varphi(v_1, v) + \dots + x_n \varphi(v_n, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(v_i, v) \overset{(*)}{=}$$

$$\varphi(v_i, v) = \varphi(v_i, x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \varphi(v_i,v_1) + \dots + x_n \varphi(v_i, v_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(v_i,v_j).$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(v_i,v_j) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \varphi(v_i,v_j).$$

Si $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale, $\varphi(v_i,v_j) = 0$ si $i \neq j$.

donc pas de doubles produits :

$$Q(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \underbrace{\varphi(v_i,v_j)}_{= 0 \text{ si } i \neq j.} = x_1^2 \varphi(v_1,v_1) + \dots + x_n^2 \varphi(v_n,v_n)$$

$$= x_1^2 Q(v_1) + \dots + x_n^2 Q(v_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 Q(v_i).$$

<u>Théorème</u> : Soit Q une forme quadratique à n variables. Alors il existe une base orthogonale pour Q.

<u>démo.</u> On démontre l'énoncé par récurrence sur le rang de Q.

Supposons d'abord $\operatorname{rg} Q = 0$. Cela veut dire que la matrice A de Q a rang 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{Q(x) = {}^t x A x}_{x \in \mathbb{R}^n} = 0 \implies$ n'importe quelle base est orthogonale.

Supposons $\operatorname{rg} Q = n \geq 1$ et l'énoncé vrai pour $\operatorname{rg} Q \leq n-1$.

(1) Il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tq $Q(v) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, i.e. $Q(v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \operatorname{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} \underset{=0}{\varphi(e_1,e_1)} & \underset{=0}{\varphi(e_1,e_2)} & \cdots & \underset{=0}{\varphi(e_1,e_n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \underset{=0}{\varphi(e_n,e_1)} & \underset{=0}{\varphi(e_n,e_2)} & \cdots & \underset{=0}{\varphi(e_n,e_n)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v,w) = \frac{1}{2}\Big[\underset{=0}{Q(v+w)} - \underset{=0}{Q(v)} - \underset{=0}{Q(w)}\Big] = 0$$

Donc $A = 0$ est la matrice nulle, mais $\operatorname{rg}(A) \geq 1$

Absurde !

(2) Soit $v_n \in \mathbb{R}^n$ tq $Q(v_n) \neq 0$. Soit $L = \operatorname{Vect}(v_n)$.

Alors $L \cap L^\perp = 0$.

Si $x \in L \cap L^\perp$, on a : $x \in L \implies x = \lambda v_n$

$$L^\perp = \{ y \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,y) = 0 \ \forall x \in L \}$$

$\overset{x \in L^\perp}{\implies} \varphi(\underset{L^\perp}{x}, \underset{L}{v_n}) = 0$

$\underset{x = \lambda v_n}{\overset{x \in L}{\Vert}} \quad \lambda\, \varphi(v_n, v_n) = \lambda\, Q(v_n)$

$\Big\} \ \lambda \underbrace{Q(v_n)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda = 0.$

$\implies x = 0.$

(3) Par la formule de la dim de $L^\perp$:

$$\boxed{\dim L^\perp \geq n - \underbrace{\dim L}_{1} = n-1.}$$

Par la formule des dimensions :

$$n \geq \dim(L + L^\perp) = \underset{=1}{\dim L} + \dim L^\perp - \underset{=0\ (2)}{\dim L \cap L^\perp}$$

$$\big[\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W\big]$$

$$\implies \boxed{\dim L^\perp \leq n-1.}$$

On a finalement $\dim L^\perp = n-1$.

(4) Soit $w_1, \dots, w_{n-1}$ une base de $L^\perp$.

$$\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto Q(x_1 w_1 + \dots + x_{n-1} w_{n-1})$$

est une forme quadratique à $n-1$ variables.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence et dire qu'il existe une base orthogonale $v_1, \dots, v_{n-1}$ de $L^\perp$.

Fin de la preuve : la base $\underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}}_{\text{base ort. de } L^\perp}, \underbrace{v_n}_{\text{base de } L}$ de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale pour Q.

$i \neq j \quad \varphi(v_i, v_j) = 0 \quad i,j \leq n-1$ par hypothèse de récurrence

$i < n \quad \varphi(v_i, v_n) = 0 \quad$ car $v_i \in L^\perp$. □

Signature

Soit Q une forme quadratique à n variables et soit $v_1, \dots, v_n$ une base orthogonale pour Q.

$$Q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = Q(v_1)x_1^2 + \cdots + Q(v_n)x_n^2.$$

$$Q(v_i) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Def : La signature (p,q) de Q est

p = nombre des v_i tq $Q(v_i) > 0$

q = ———————— $Q(v_i) < 0$.

Exemples : (1) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Base orthogonale ? Une base est orthogonale si et seulement la matrice dans cette base est diagonale. Puisque A est la matrice de Q dans la base canonique, alors $\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ est orthogonale.

$$\varphi(e_1, e_2) = {}^t e_1 A e_2 = (1 \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

On aurait pu remarquer aussi que Q n'a pas de double produit, donc la base canonique est orthogonale.

Signature ? La signature est $(2,0)$.

(2) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Diagonale

Base orthogonale ? $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Signature ? $(1,1)$

(3) $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$.

Base orthogonale ? $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$

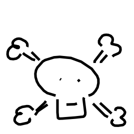
Signature ? $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(v,w) = {}^t v A w = (1 \ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Donc $\underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ est une base orthogonale.



Si $v_1, \dots, v_n$ n'est pas une base orthogonale, alors on ne peut pas utiliser cette base pour utiliser la signature.

$Q(1,1) = 2$ $Q(1,-1) = -2$.

La signature est $(1,1)$.

(4) $Q(x_1, x_2) = x_1^2$. $\varphi(x,y) = x_1y_1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale

Base orthogonale ? $\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Sign ? $Q(e_1) = 1$, $Q(e_2) = 0$ $\Longrightarrow$ $(1,0)$.

Rmq : Si Q est de signature (p,q) alors $rg(A) = p+q$.

Théorème de Sylvester : La signature d'une forme quadratique est indépendante de la base orthogonale choisie.

démo. Soient $v_1,\dots,v_n$ et $v_1',\dots,v_n'$ des bases orthogonales pour Q. On peut supposer

$$Q(v_i) > 0 \quad i=1,\dots,p$$
$$Q(v_i) < 0 \quad i=p+1,\dots,p+q$$
$$Q(v_i) = 0 \quad i=p+q+1,\dots,n.$$

Donc Q a signature (p,q) dans cette base.

On fait de même pour l'autre base :

$$Q(v_i') > 0 \quad i=1,\dots,p'$$
$$Q(v_i') < 0 \quad i=p'+1,\dots,p'+q'$$
$$Q(v_i') = 0 \quad i=p'+q'+1,\dots,n$$

Dans cette base $\operatorname{sign}(Q) = (p',q')$.

On considère :

$$V_+ = \operatorname{Vect}(v_1,\dots,v_p, v_{p+q+1},\dots,v_n)$$
$$V_- = \operatorname{Vect}(v_{p+1},\dots,v_{p+q}).$$
$$V_+' = \operatorname{Vect}(v_1',\dots,v_{p'}', v_{p'+q'+1}',\dots,v_n')$$
$$V_-' = \operatorname{Vect}(v'_{p'+1},\dots,v'_{p'+q'}).$$

Soit $x \in V_+$: $x = x_1v_1 + \dots + x_pv_p + x_{p+q+1}v_{p+q+1} + x_nv_n$

$$Q(x) = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0}\underbrace{\boxed{Q(v_1)}}_{>0} + \dots + \underbrace{x_p^2}_{\geq 0}\underbrace{\boxed{Q(v_p)}}_{> 0} + \underbrace{\boxed{x_{p+q+1}^2 Q(v_{p+q+1}) + \dots + x_n^2 Q(v_n)}}_{=0}$$

$v_1,\dots,v_n$ orthogonale

$$\Longrightarrow Q(x) \geq 0.$$

Soit $x \in V_-'$: $x = x'_{p'+1}v'_{p'+1} + \dots + x'_{p'+q'}v'_{p'+q'}$

$$Q(x) = \underbrace{{x'}_{p'+1}^2}_{\geq 0}\underbrace{Q(v'_{p'+1})}_{<0} + \dots + \underbrace{(x'_{p'+q'})^2}_{\geq 0}\underbrace{Q(v'_{p'+q'})}_{<0} \leq 0$$

$$Q(x) = 0 \Longrightarrow x'_{p'+1} = x'_{p'+2} = \dots = x'_{p'+q'} = 0.$$
$$\Longrightarrow x = 0.$$

Maintenant : $x \in V_+ \cap V_-'$.

$$\begin{tikzcd}
& x \in V_+ \cap V_-' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Q(x) \geq 0 \arrow[dr] & & Q(x) \leq 0 \arrow[dl] \\
& Q(x) = 0 \arrow[r, Rightarrow, "x \in V_-'"'] & x = 0
\end{tikzcd}$$

On a trouvé : $V_+ \cap V_-' = 0$.

$$n \geq \dim(V_+ + V_-') = \underbrace{\dim V_+}_{p+(n-(p+q))} + \underbrace{\dim V_-'}_{q'} - \underbrace{\dim V_+ \cap V_-'}_{0}$$

$$\Longrightarrow \cancel{n} \geq \cancel{p} + \cancel{n} - \cancel{p} - q + q' \Longrightarrow q \geq q'.$$

Pour démontrer $q' \geq q$ il suffit de faire le même raisonnement avec V_+' et V_-. On obtient donc

$$q' = q$$
$$p = \operatorname{rg}(A) - q = \operatorname{rg}(A) - q' = p'.$$

$\square$