Rappel : Étant donnée une forme quadratique Q

on a montré 2 choses :

1. il existe $v_1, \dots, v_n$ base orthogonale pour Q

$$Q(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$$

2. (p, q) p = nombre de $a_i > 0$

q = nombre de $a_i < 0$

cela ne dépend pas de la base orthogonale choisie et on appelle ça la signature de Q.

Exemple 1 :

$$Q(x_1,\dots,x_4) = \underline{x_1^2} - \underline{2x_1x_2} + \underline{4x_1x_3} + \underline{2x_1x_4}$$
$$+ x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 4x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

En présence d'un carré x_1^2 on cherche à écrire tous les termes avec x_1 comme provenant d'un carré.

$$(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)^2 = \underline{x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4}$$
$$+ x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4$$
$$+ 4x_3x_4.$$

$$Q(x_1,\dots,x_4) = (\underbrace{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4}_{y_1})^2 \cancel{-x_2^2} \cancel{-4x_3^2} - x_4^2 \cancel{+4x_2x_3} + 2x_2x_4$$
$$-4x_3x_4$$
$$\cancel{+x_2^2} \cancel{+4x_3^2} + 5x_4^2 \cancel{-4x_2x_3} + 6x_2x_4 - 4x_3x_4$$
$$= y_1^2 + 4x_4^2 + 8x_2x_4 - 8x_3x_4$$
$$= y_1^2 + 4\left(x_4^2 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4\right)$$

On recommence avec $x_4^2 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$

$$(x_4 + x_2 - x_3)^2 = \underline{x_4^2} + x_2^2 + x_3^2 + 2\underline{x_2x_4} - 2\underline{x_3x_4} - 2x_2x_3.$$

$$x_4^2 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = (x_4 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_2 - x_3)^2 \qquad = (x_4 + x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2.$$

Fin de l'histoire :

$$Q(x_1,\dots,x_4) = \underbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}_{y_1}{}^2 + 4\underbrace{(x_4 + x_2 - x_3)}_{y_2}{}^2 - 4\underbrace{(x_2 - x_3)}_{y_3}{}^2.$$

$$= y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2.$$

Sign $Q \doteq (2,1)$ $\qquad$ $\operatorname{rg} Q = 3$.

Rmq : On a trouvé des coordonnées tq la forme quadratique est somme de carrés, mais on n'a pas trouvé une base orthogonale.

Exemple 2 :

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Rmq: On va utiliser $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

1ère méthode : $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$ et continuer $x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2$

Donc on peut continuer comme avant.

2ème méthode : $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$$(x_1+x_3)(x_2+x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_3^2$$

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_3)(x_2+x_3) - x_3^2$$

On pose :

$y_1 + y_2 = x_1 + x_3$

$y_1 - y_2 = x_2 + x_3$

$y_3 = x_3$

$$Q(y_1,y_2,y_3) = (y_1+y_2)(y_1-y_2) - y_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{sign} Q = (1,2)$ $\quad \operatorname{rg} Q = 3$.

Rmq: on n'a pas trouvé une base orthogonale.

Erreur à ne pas faire :

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_1 = y_3 + y_4 \\ x_2 = y_5 + y_6 \\ x_3 = y_5 - y_6 \end{array}}$$

$(y_1+y_2)(y_1-y_2) + (y_5-y_6)(y_5+y_6) + (y_3-y_4)(y_3+y_4)$

$= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2$.

Il y a un truc qui va pas !

Ceci n'est pas un changement de variables !

ex : $y_1 + y_2 = x_1 = y_3 + y_4$.

Comment trouver les bases orthogonales associées?

<u>Exemple</u> : $v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

Quels sont les coordonnées d'un vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base v_1, v_2 ?

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a + 3b \\ y = 3a + 7b \end{cases} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{cases} a = x - 3b \\ y - 3x = -2b \end{cases}$$

$$a = x - 3b = x - \frac{9x - 3y}{2} = \frac{-7x + 3y}{2}$$

$$b = \frac{3x - y}{2}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}y \\ b = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a + 3b\\3a + 7b\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 7\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

matrice qui a pour colonnes les vecteur v_1, v_2.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -3\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7x - 3y\\-3x + y\end{pmatrix}.$$

Problème inverse : on connait le changement de coordonnées et on veut connaître la base.

<u>Exemple</u> $\begin{cases} y_1 = x_1 - 4x_2 \\ y_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

Question : trouver une base v_1, v_2 t.q.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = y_1 v_1 + y_2 v_2$$

Soit P la matrice avec v_1, v_2 comme colonnes.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ $\quad$ On veut connaître P.

$P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -4\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix}1 & -4\\2 & -3\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

Donc la base v_1, v_2 dans la quelle on a les coord y_1, y_2 est donneé par les colonnes de P :

$$v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

<u>Régle générale</u> : Supposons d'avoir un changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

La base dans laquelle on a les coord $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ est donnée par les colonnes de P^{-1}.

<u>Exemple</u>:

$$= \underbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}_{y_1}^2 + 4\underbrace{(x_4 + x_2 - x_3)}_{y_2}^2 - 4\underbrace{(x_2 - x_3)}_{y_3}^2$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 = \quad\ \ x_2 - x_3 + x_4 \\ y_3 = \quad\ \ x_2 - x_3 \\ y_4 = \qquad\qquad\quad\ x_4 \end{cases}$$

Les changements de variables sont de la forme $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Problème</u>!

$L_2 = L_3 + L_4$

donc P n'est pas inversible

On pose plutôt $y_4 = x_1 + x_4$

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ $L_1 - L_4 + L_3 \longrightarrow L_1$
$L_2 - L_3 \longrightarrow L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ $L_3 + L_1 \longrightarrow L_3$
$L_4 - L_2 \longrightarrow L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right. \overset{P^{-1}}{\boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}}}\left.\right)$$

<u>Morale</u>: Une base orthogonale pour la forme quadratique Q dans l'Exemple 1 est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\in$ ker Q.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On savait à priori que v_4 était dans le noyau de Q parce que

$$Q(y_1 v_1 + \cdots + y_4 v_4) \overset{= y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2}{=} y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 + \underbrace{\overset{Q(v_4)}{\overset{\shortparallel}{0}} \cdot y_4^2}_{}$$

$\Downarrow$

$v_4 \in$ ker Q.

car $v_1, \ldots, v_4$ base orthogonale.

$$\begin{cases} v_1, \ldots, v_4 \text{ base orthogonale} & \varphi(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j. \\ Q(v_4) = 0 & \end{cases}$$

$$\varphi(v, w) = \frac{1}{2}\left[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\right]$$

Un vecteur $v \in$ ker Q ssi $\varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^4$.

$$\varphi(\underbrace{y_1 v_1 + \cdots + y_4 v_4}_{v}, v_4) = y_1 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(v_1, v_4)}} + y_2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(v_2, v_4)}}$$
$$+ y_3 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(v_3, v_4)}} + y_4 \underset{Q(v_4) = 0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(v_4, v_4)}}$$
$$= 0$$

$$\varphi(v, v_4) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \implies v_4 \in \text{ker } Q.$$

$$\varphi(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left[\underset{1+5}{Q(v_1 + v_2)} - \underset{1}{Q(v_1)} - \underset{5}{Q(v_2)}\right] = 0.$$

On a vu: $v_1, \ldots, v_n$ est orthogonale pour Q si

$$Q(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

parce que

$$\varphi(v_i, v_j) = \frac{1}{2}\Big[\overset{a_i + a_j}{\overset{\shortparallel}{Q(v_i + v_j)}} - \overset{a_i}{\overset{\shortparallel}{Q(v_i)}} - \overset{a_j}{\overset{\shortparallel}{Q(v_j)}}\Big] = 0 \quad i \neq j.$$

<u>Rmq</u>: si on ajoute des variables pour compléter le changement de variables, alors les vecteurs qui correspondent aux variables ajoutées forment une base du noyau.