Recap :

1. Une forme quadratique à n-variables s'écrit dans une base opportune comme somme de carrés :

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

2. La signature $(p,q)$ ne dépend pas du choix.

$$p = \# \text{ de } a_i > 0$$

$$q = \# \text{ de } a_i < 0$$

3. On sait comment calculer la signature

4. Si $a_1, \ldots, a_p > 0$ , $a_{p+1}, \ldots, a_{p+q} < 0$

$$a_i x_i^2 = \left(\sqrt{a_i}\, x_i\right)^2 \quad \text{si } a_i > 0$$

$$a_i x_i^2 = \left(-\sqrt{-a_i}\, x_i\right) \quad \text{si } a_i < 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 &= \left(\sqrt{a_1}\, x_1\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{a_p}\, x_p\right)^2 \\ &\quad - \left(\sqrt{|a_{p+1}|}\, x_{p+1}\right)^2 - \cdots - \left(\sqrt{|a_{p+q}|}\, x_{p+q}\right)^2 . \\ &= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 . \end{aligned}$$

## Espaces euclidiens

**déf.** Une forme quadratique à $n$ variables $Q$ est dite <u>définie positive</u> si $Q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
On dira alors que la forme bilinéaire $\varphi$ associée à $Q$ est un produit scalaire et on écrira
$$(x \mid y) = \varphi(x,y).$$

**Exemple.** 1) Dans $\mathbb{R}^2$, $Q(\underset{(x_1,x_2)}{x}) = x_1^2 + x_2^2$ est déf. pos.

$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ et

$Q(x) = 0 \implies x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

2) Dans $\mathbb{R}^n$ : $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ est déf. pos.

$Q(x) \geq 0$ car somme de carrés.

$Q(x) = 0 \implies x_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

La forme bilinéaire associée à $Q$ :
$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (x \mid y)$$
On l'appelle <u>produit scalaire standard</u>.

**Rmq:** Pour qu'une forme quadratique à $n$-variables soit déf $> 0$ il faut et il suffit que sa signature soit $(n,0)$.

. Si la signature est $(n,0)$ <u>dans une certaine base orthogonale</u> $v_1, \dots, v_n$, on peut écrire
$$Q(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
déf $> 0$ comme dans l'Exemple

. Si $Q$ est définie positive et $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale
$$Q(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = \underbrace{Q(v_1)}_{>0}x_1^2 + \cdots + \underbrace{Q(v_n)}_{>0}x_n^2$$
$$\implies \operatorname{sign}(Q) = (n,0).$$

**déf.** Soit $Q$ une forme quadratique définie positive. Une base orthogonale $v_1, \dots, v_n$ est <u>orthonormée</u> si $Q(v_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

**Rmq:** $v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée si
$$(v_i \mid v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

**Exemple:** 1) $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

La base canonique est orthonormée
$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-ème position} \qquad Q(e_i) = 0^2 + \cdots + 1^2 + \cdots + 0^2 = 1.$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

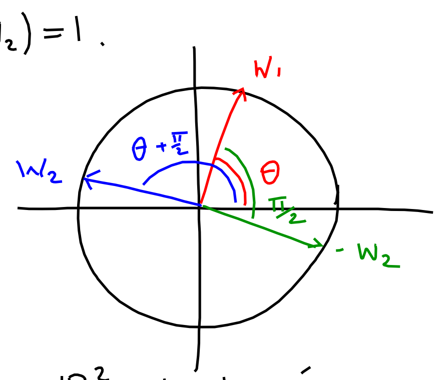
$$\underset{i \neq j}{(e_i \mid e_j)} = 0 \cdot 0 + \cdots + \underset{\text{i-ème terme}}{1 \cdot 0} + \cdots + \underset{\text{j-ème terme}}{0 \cdot 1} + \cdots + 0 \cdot 0 = 0$$

2) $Q(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est une base orthonormée.
$$w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$(w_1 \mid w_2) = 0$ : $w_1, w_2$ est une base orthogonale

Pour que $w_1, w_2$ soit une base orthonormée :
$1 = a^2 + b^2 = Q(w_1) = Q(w_2) = 1$.

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$




$$\begin{cases} -b = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ a = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Une base orthonormée dans $\mathbb{R}^2$ est donnée, par exemple, par
$$w_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

**Rmq:** $w_1, -w_2$ est aussi une base orthonormée

Entre $w_1, w_2$ il y a un angle orienté (anti-horaire) de $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$. Entre $w_1, -w_2$ un angle de $-\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ $(270°)$.

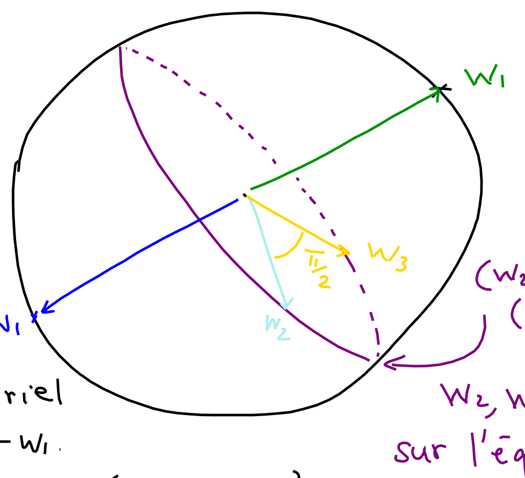
Celles ci sont toutes les bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$.

2) Pour $\mathbb{R}^3$, $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tq $Q(x) = 1$ appartiennent à la sphère de rayon $1$.

$w_1, w_2, w_3$ base orthonormée

Deux possibilités:
1. le produit vect de $w_2$ et $w_3$ est $w_1$
2. le produit vectoriel de $w_2$ et $w_3$ est $-w_1$.




$(w_2 \mid w_1) = 0$
$(w_3 \mid w_1) = 0$
$\Downarrow$
$w_2, w_3$ sont sur l'équateur.

Une base orthonormée dans $\mathbb{R}^3$ revient à fixer un pôle (Nord ou Sud) et deux points sur l'équateur correspondant avec un angle de $90°$ degrés entre eux.

**Question:** Si on décide que Roscoff est le pôle Nord, quel est son équateur?

Choisir une base orthonormée tq $w_1 = \text{Roscoff}$.

## Norme

déf. Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tq.

1) $\alpha(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

2) $\alpha(x) = 0 \implies x = 0$.

3) $\alpha(\lambda x) = |\lambda| \, \alpha(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

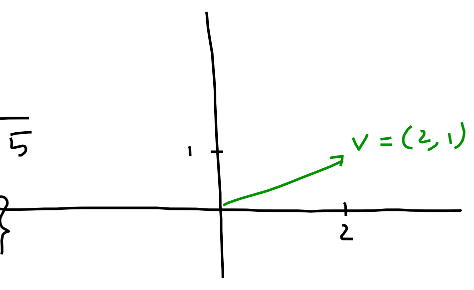
4) $\alpha(x+y) \leq \alpha(x) + \alpha(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Norme d'un vecteur = longueur.

Exemples: 1) la norme euclidienne

$\| (x_1, x_2) \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

$\| (2,1) \|_2 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$




2) $\| (x_1, x_2) \|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2| \}$

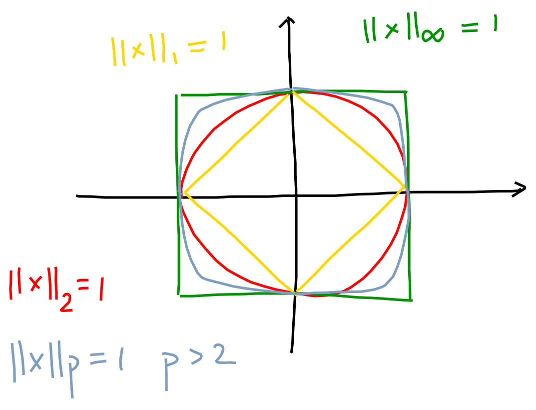
$\| (2,1) \|_\infty = 2$.

3) $\| (x_1, x_2) \|_1 = |x_1| + |x_2|$

$\| (2,1) \|_1 = 3$.

4) $p > 1$

$\| (x_1, x_2) \|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$




Nous on va s'intéresser à la norme $\| \cdot \|_2$.

déf : Soit $Q$ une forme quadratique à $n$ variables.
On pose $\|x\| := \sqrt{Q(x)}$.

Lemme (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Soit $Q$ une forme quadratique déf pos, et soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$(x|y)^2 \leq Q(x)\,Q(y)$$

avec égalité ssi $x, y$ sont liés.

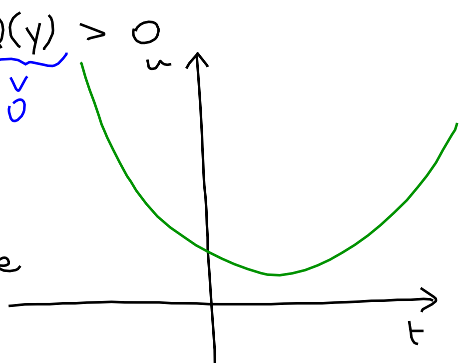
démo. Si $x = 0$ ou $y = 0$ le résultat est trivial (car les deux côtés sont nuls.)
On suppose $x, y$ liés, par exemple $y = \lambda x$. Alors,

$$(x|y)^2 = (x|\lambda x)^2 = \lambda^2 (x|x)^2$$
$$= \underbrace{(x|x)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(\lambda x|\lambda x)}_{Q(\lambda x)} = Q(x)\,Q(y).$$

Supposons que $x$ et $y$ sont linéairement indépendants.
Donc $x + ty \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$\underset{Q \text{ déf pos}}{\Longrightarrow} \quad Q(x+ty) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\| \qquad f(t) = Q(x) + 2t\,(x|y) + t^2 \underbrace{Q(y)}_{\vee\, 0} > 0$$




Le graphe de $f$ est une parabole; la concavité est vers le haut; elle ne rencontre pas l'axe de abscisses.
Si $u = f(t) = Q(x) + 2t(x|y) + t^2 Q(y)$
l'intersection avec l'axe des abscisses est donné par
$u = 0 \iff Q(x) + 2t(x|y) + Q(y)t^2 = 0$

Puisque la parabole ne touche pas l'axe $u = 0$ on a $\Delta < 0$.

$$0 > \frac{\Delta}{4} = (x|y)^2 - Q(x)Q(y)$$

C'est l'inégalité qu'on voulait montrer ! □

Cor : Si $Q$ est une forme quadratique déf. positive, alors $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$ est une norme.

démo : 1) $Q(x) \geq 0 \implies \|x\| \geq 0$ ;

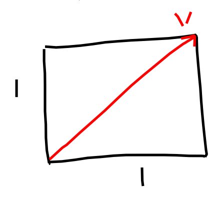
2) $\|x\| = 0 \implies \|x\|^2 = Q(x) = 0 \underset{\text{pos.}}{\overset{Q \text{ déf}}{\Longrightarrow}} x = 0$.

3) $\|\lambda x\| = \sqrt{Q(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 Q(x)} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{|\lambda|} \underbrace{\sqrt{Q(x)}}_{\|x\|}$

4)
$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y)$$
$$= Q(x) + 2\underbrace{(x|y)}_{\overset{\wedge|\ CS}{\sqrt{Q(x)Q(y)}}} + Q(y)$$
$$\leq Q(x) + 2\sqrt{Q(x)}\sqrt{Q(y)} + Q(y)$$
$$\| $$
$$\|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

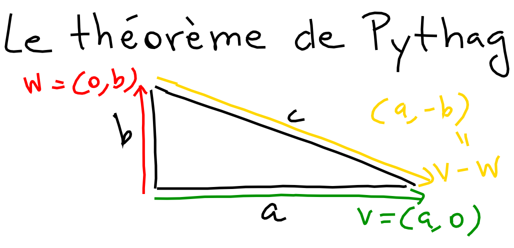
$\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Exemple : La diagonal du carré




$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

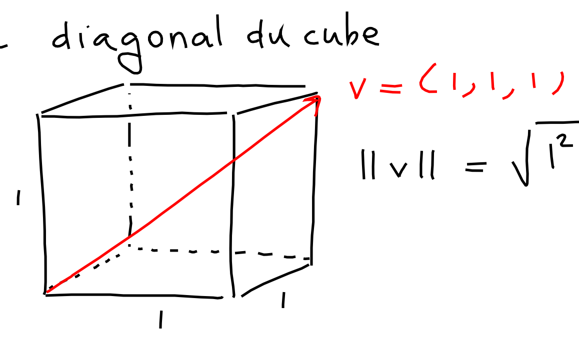
Le théorème de Pythagore




$(v|w) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.
$Q(v - w) = Q(v) + Q(w)$.
$c^2 = a^2 + b^2$

$a = \|v\|$
$b = \|w\|$
$c = \|v - w\|$

La diagonal du cube




$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$