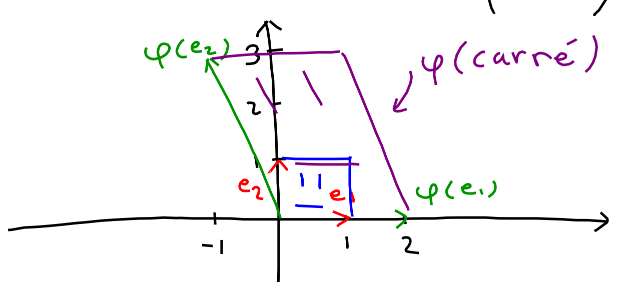
Isométries

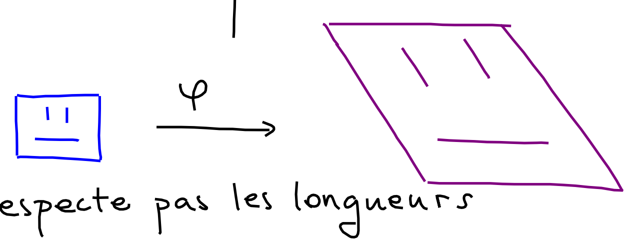
Exemple: On considère le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 \qquad x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$$

$$\varphi(x,y) = (2x,\ 3y-x)$$

φ est linéaire, $\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$





- φ ne respecte pas les longueurs
- φ ne respecte pas les angles

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|$ la norme associée.

déf: Une application linéaire $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si $\|\varphi(v)\| = \|v\|\ \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Prop: Soit $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\|\varphi(v)\| = \|v\|\ \forall v$, i.e. φ est une isométrie;
2) $(\varphi(v)|\varphi(w)) = (v|w)\quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$;
3) pour toute base orthonormée $v_1,\dots,v_n$, on a que $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)$ est orthonormée;
4) il existe une base orthonormée $v_1,\dots,v_n$, t.q. $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)$ est orthonormée.

Rmq: En particulier, si φ est une isométrie,

$$\frac{(\varphi(v)|\varphi(w))}{\|\varphi(v)\|\,\|\varphi(w)\|} = \frac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|}.$$

En particulier, φ préserve l'angle entre v et w.

La réciproque n'est pas vraie : si φ préserve les angles, elle ne préserve pas forcément les longueurs. Par exemple, $\varphi = 2\,\mathrm{id}$

$$\|\varphi(x)\| = \|2x\| = 2\|x\| \neq \|x\| \quad (\text{si } x \neq 0)$$

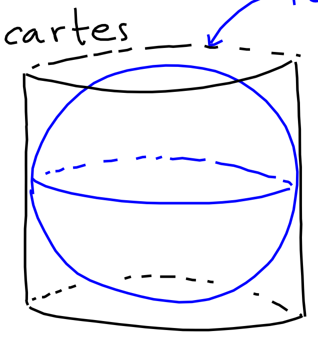
mais $$\frac{(\varphi(x)|\varphi(y))}{\|\varphi(x)\|\cdot\|\varphi(y)\|} = \frac{(2x|2y)}{\|2x\|\cdot\|2y\|}$$

En particulier, φ préserve les angles. $$= \frac{\cancel{4}\,(x|y)}{\cancel{2}\|x\|\cdot\cancel{2}\|y\|} = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Une application du type $\lambda\,\mathrm{id}$ est appelée $\underbrace{\text{homo}}_{\text{égal}}\underbrace{\text{thétie}}_{?}$ "même angle"

Il y a des applications qui respectent les angles qui ne sont pas linéaires.

Par exemple les projections utilisées pour dessiner les cartes



Projection de la Terre moins les pôles sur le cylindre.

démo de la Prop. (1) $\Rightarrow$ (2) Par la Formule de Polarisation :

$$(\varphi(v)|\varphi(w)) = \frac{1}{2}\Big[\overbrace{\|\underbrace{\varphi(v)+\varphi(w)}_{\varphi(v+w)}\|^2}^{\|v+w\|^2} - \overbrace{\|\varphi(v)\|^2}^{\|v\|^2} - \overbrace{\|\varphi(w)\|^2}^{\|w\|^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right]$$

$$= (v|w)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $v_1,\dots,v_n$ une base orthonormée.

$$(\varphi(v_i)|\varphi(v_j)) \underset{(2)}{=} (v_i|v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)$ est une base orthonormée.

(3) $\Rightarrow$ (4) Trivial.

(4) $\Rightarrow$ (1) Soit $v_1,\dots,v_n$ une base orthonormée telle que $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)$ est une base orthonormée.

$$x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|x_1v_1\|^2 + \cdots + \|x_nv_n\|^2 \underset{\|v_i\|=1}{=} |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|x_1\varphi(v_1) + \cdots + x_n\varphi(v_n)\|^2$$

$$\underset{(4)\ \&\ \text{Pythagore}}{=} \|x_1\varphi(v_1)\|^2 + \cdots + \|x_n\varphi(v_n)\|^2$$

$$\underset{\|\varphi(v_i)\|=1}{=} |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \implies \|\varphi(v)\| = \|v\|.$$

$\square$

Rmq: Si φ est une isométrie, elle est bijective.

Puisque φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, il suffit de montrer qu'elle est injective. Et pour cela, il suffit de vérifier que $\ker(\varphi) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = 0$.

$$0 = \|\varphi(x)\| = \|x\|$$

Donc $\|x\| = 0$, d'où $x = 0$.

Les isométries du plan

Dorénavant, on considère $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard.

Quand est-ce qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ est une isométrie ?

$$(Ax \mid Ay) = (x \mid y) = {}^t x\, y$$

$$\overset{\parallel}{{}^t(Ax)(Ay)} = {}^t x\, {}^t A A\, y.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = e_1 \quad y = e_1 : \quad (1\ 0) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t e_1\, {}^t A A\, e_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2$$
$$\parallel$$
$$(Ae_1 \mid Ae_1)$$

$$(Ae_1 \mid Ae_2) = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}$$
$$(Ae_2 \mid Ae_2) = a_{12}^2 + a_{22}^2.$$

Conclusion : A est une isométrie si et seulement si :

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

Rmq Générale : si $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Soit $v_i = Ae_i$ la i-ème colonne de A.

A est une isométrie si et seulement si

$Ae_1 = v_1, \dots, Ae_n = v_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (par rapport au produit scalaire standard)

parce que $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée

(On utilise ici le point (4) de la Prop. précédente)

De manière équivalente :

$${}^t A A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ {}^t v_2 \\ \vdots \\ {}^t v_n \end{pmatrix} (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t v_1 v_1 = (v_1 \mid v_1) & {}^t v_2 v_1 = (v_2 \mid v_1) & \dots & (v_1 \mid v_n) \\ (v_2 \mid v_1) & (v_2 \mid v_2) & \dots & (v_2 \mid v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n \mid v_1) & (v_n \mid v_2) & \dots & (v_n \mid v_n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \text{ isométrie} \iff (v_i \mid v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \iff {}^t A A = \mathrm{id}.}$$

$v_i = Ae_i =$ i-ème colonne de A

On revient aux matrices 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ \underbrace{b}_{v_1} & \underbrace{d}_{v_2} \end{pmatrix} \qquad A \text{ isométrie ssi}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\ c^2 + d^2 = 1 \longrightarrow \varepsilon^2 \underbrace{(a^2 + b^2)}_{1} = 1 \end{cases}$$

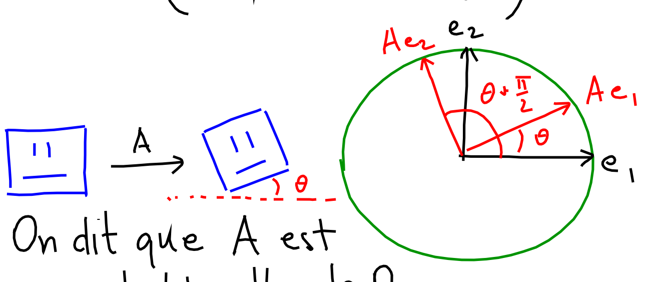
$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases} \qquad \Rightarrow \varepsilon^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon = \pm 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$$

Deux cas : $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$.

On commence par le cas $\varepsilon = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}$$



On dit que A est une rotation d'angle θ.

On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Rmq : $R_\theta R_\omega = R_{\theta+\omega}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\omega) & -\sin(\theta+\omega) \\ \sin(\theta+\omega) & \cos(\theta+\omega) \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega & -\sin\theta\cos\omega - \sin\omega\cos\theta \\ \sin\theta\cos\omega + \cos\theta\sin\omega & \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega \end{pmatrix}.$$
$$\parallel$$
$$R_\theta R_\omega = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Les formules de soustraction pour cos et sin s'obtiennent par $R_{\theta-\omega} = R_\theta R_{-\omega}$

D'autre part, $R_{\omega-\omega} = R_\omega R_{-\omega}$

$$\overset{\parallel}{R_0} = \mathrm{id} \implies R_{-\omega} = (R_\omega)^{-1}$$

$$R_\omega^{-1} = \frac{1}{\underset{(\cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2 = 1}{\det R_\omega}} \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

On en tire, en calculant $R_{\theta-\omega} = R_\theta R_\omega^{-1}$:

$$\cos(\theta - \omega) = \cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega$$
$$\sin(\theta - \omega) = \cos\theta\sin\omega - \sin\theta\cos\omega.$$

On étudie le cas $\varepsilon = -1$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = -(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = -1.$$

$$P_A(X) = \det(A - X\cdot \mathrm{id})$$
$$= X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$$

Les valeurs propres de A sont 1 et -1.

$$A - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}}_{v} = \ker(A - \mathrm{id})$$

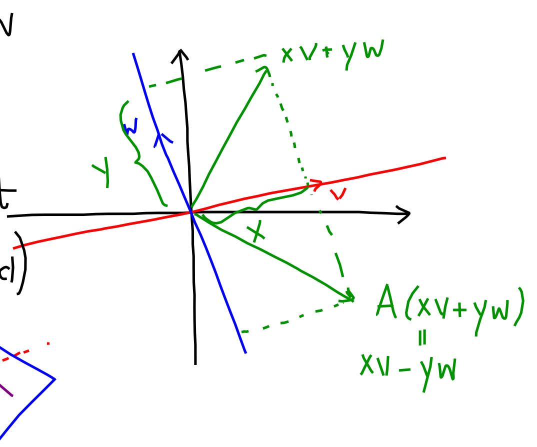
$$A + \mathrm{id} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Vect}\overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}}^{w} = \ker(A + \mathrm{id})$$

Par définition, $Av = v$ et $Aw = -w$.

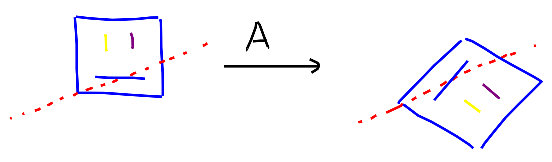
$$(v|w) = (\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) + (\sin\theta)^2$$
$$= (\cos\theta)^2 - 1 + (\sin\theta)^2 = 0.$$

$\Longrightarrow$ v, w orthogonaux

$$A(xv + yw) = xv - yw$$



A est une symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathrm{Vect}(v) = \ker(A - \mathrm{id})$



En regardant en sens anti-horaire l'ordre des yeux est changé.