EXERCICES SUR RIEMANN-ROCH

Dans toute cette feuille k désigne un corps algébriquement clos.

1. Plongement canonique

Soit X une courbe projective lisse.

Exercice 1.1. On suppose que X est de genre $g \geqslant 1$. Montrer les faits suivants :

(1) Pour tout point $x \in X$ il existe une forme différentielle sans pôles sur X ne s'annulant pas en x.

(2) L'application $\iota_X : X \to \mathbb{P}(\mathrm{Hom}_k(\Omega^1(X), k))$ associant à un point x le noyau de l'application d'évaluation en x, est définie partout.

Définition 1.2. L'application ι_X est appelée *application canonique.*

On dit que X est *hyperelliptique* si elle est de genre $\geqslant 2$ et il existe un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2.

(3) Supposons X de genre $g \geqslant 2$. Montrer que ι_X est un plongement si et seulement si X n'est pas hyperelliptique.

Exercice 1.3. Soit $P \in k[x, y]$ un polynôme irréductible de degré $d \geqslant 3$ tel que la courbe plane projective X associée à P soit lisse.

On se propose de montrer que le genre de X est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

(1) Montrer qu'on peut supposer $\deg P = \deg_y P$.

On considère l'unique morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1$ qui étend l'application $[1 : x : y] \mapsto x$. Montrer les faits suivants :

(2) Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que la droite à l'infini $\{x_0 = 0\}$ ne contient pas de point de ramification pour f.

(3) Un point $p \in X_0$ est de ramification pour f si et seulement si $\partial P/\partial y(p) = 0$.

(4) Pour tout point $p \in X_0$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\dim_k \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,p}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,f(p)}} &= \mathrm{ord}_p\left(\partial P/\partial y\right)\\ &= i_p(P, \partial P/\partial y) := \dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/(P, \partial P/\partial y).\end{aligned}$$

(5) Le genre de X est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. (Indication : on appliquera la formule de Riemann-Hurwitz et le théorème de Bezout.)

Exercice 1.4. Soit $P \in k[x, y]$ un polynôme irréductible de degré $d \geqslant 3$ tel que la courbe plane projective X associée à P soit lisse. Montrer les faits suivants :

(1) Pour tout entier $i, j \geqslant 0$ tels que $i + j \leqslant d - 3$, la forme différentielle méromorphe

$$\omega_{ij} = \frac{x^i y^j \, dx}{-\partial P/\partial x}$$

n'a pas de pôles.

(2) Les formes différentielles ω_{ij} $(i, j \geqslant 0$ et $i + j \leqslant d - 3)$ sont linéairement indépendantes et elles forment une base de l'espace des formes différentielles régulières sur X.

(3) L'application canonique de X est donnée par
$$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^{d-3-(i+j)} x_1^i x_2^j : i, j \geqslant 0, i+j \leqslant d-3].$$
(4) Les courbes hyperelliptiques ne peuvent pas être plongées dans $\mathbb{P}^2$.