EXERCICES SUR LES COURBES ELLIPTIQUES SUR LES CORPS LOCAUX

1. Équations de Weierstrass minimales

Soit K un corps de valuation discrète d'anneau d'entiers R, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $k = R/\mathfrak{m}$. On suppose que la caractéristique de k est différente de $2, 3$. Soit E une courbe elliptique donnée par une équation de Weierstrass

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

On pose :

$$\begin{aligned}
b_2 &= a_1^2 + 4a_2,\\
b_4 &= 2a_4 + a_1a_3,\\
b_6 &= a_3^2 + 4a_6,\\
c_4 &= b_2^2 - 24b_4,\\
c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6,\\
1728\Delta &= c_4^3 - c_6^2.
\end{aligned}$$

On considère le changement de variables suivant :

$$x = u^2x' + r, \qquad\qquad y = u^3y' + u^2sx' + t,$$

avec $u, r, s, t \in K$ et $u \neq 0$ et l'équation de Weierstrass correspondante

$$y'^2 + a_1'x'y' + a_3'y' = x'^3 + a_2'x'^2 + a_4'x + a_6'.$$

On a ([Silverman, III.1]) :

$$\begin{aligned}
u^4c_4' &= c_4,\\
u^6c_6' &= c_6,\\
u^{12}\Delta' &= \Delta,
\end{aligned}$$

où c_4', c_6' et Δ' sont définis de manière évidente.

Définition 1.1. Une équation de Weierstrass est dite *minimale* si $a_1, \ldots, a_6 \in R$ et $v(\Delta)$ est le minimum parmi la valuation du discriminant des équations de Weierstrass de E à coefficients dans R.

Exercice 1.2 ([Silverman, VII, Ex. 7.1 (a)])**.** Soit E une courbe elliptique donnée par une équation de Weierstrass à coefficients dans R. Montrer que l'équation est minimale si et seulement $v(\Delta) < 12$ ou $v(c_4) < 4$.

Exercice 1.3 ([Silverman, VII, Ex. 7.1 (b)])**.** Soit E une courbe elliptique d'équation minimale $y^2 = x^3 + ax + b$. Montrer que la réduction de E est :

(1) bonne si et seulement $4a^3 + 27b^2 \in R^*$;

(2) multiplicative si et seulement si $4a^3 + 27b^2 \in \mathfrak{m}$ et $ab \in R^*$;

(3) additive si et seulement si $a, b \in \mathfrak{m}$.

Exercice 1.4 ([Silverman, VII, 7.2])**.** Soit E une courbe elliptique sur K de avec invariant j entier. Montrer que le discriminant minimal Δ de E satisfait $v(\Delta) < 12$.

Exercice 1.5 ([Silverman, VII, Ex. 7.5])**.** Montrer que toute courbe elliptique E suivante est à bonne réduction dans le corps K correspondant :

$$
\begin{aligned}
&E: \quad y^2 = x^3 + x, && K = \mathbb{Q}_2(\sqrt[8]{2}, \sqrt[4]{-1}),\\
&E: \quad y^2 + y = x^3, && K = \mathbb{Q}_3(\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{-1}),\\
&E: \quad y^2 = x^3 + x^2 - 3x - 2, && K = \mathbb{Q}_2(\sqrt[4]{5}).
\end{aligned}
$$

Exercice 1.6 ([Silverman, VII, Ex. 7.7])**.** Soit E une courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + ax + b$. On désigne par $E_0(K)$ le sous-groupe de $E(K)$ dont la réduction est un point non singulier. Montrer les faits suivants :

(1) Si $v(a) \geqslant 1$ et $v(b) = 1$, on a $E(K) = E_0(K)$.

(2) Si $v(a) = 1$ et $v(b) \geqslant 2$, on a $E(K)/E_0(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Si $v(a) \geqslant 2$ et $v(b) = 2$, le groupe $E(K)/E_0(K)$ est ou bien $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou trivial.