EXAMEN DE SURFACES DE RIEMANN

25 OCTOBRE 2017

Durée : 3 heures. Seulement les notes de cours sont authorisées. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite.

Exercice 1. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau et $X = \mathbb{C}/\Lambda$. On désigne par $\mathrm{End}(X)$ l'anneau des applications holomorphes $f\colon X \to X$ respectant la loi de groupe de E (la structure d'anneau est donnée par la composition).

On rappelle que pour tout $f \in \mathrm{End}(X)$ il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f([z]) = f([az])$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(1) Montrer que $\mathrm{End}(X)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, donc commutatif.

On dit que la courbe elliptique X a *multiplication complexe* si $\mathbb{Z} \subsetneq \mathrm{End}(X)$. On suppose $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ avec $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ et que X a multiplication complexe.

(2) Montrer que τ satisfait à une equation de degré 2 à coefficients entiers.

(3) Montrer que $\mathrm{End}(X)$ est contenu dans $\mathbb{Z}[\tau]$.

(4) Déduire que tout $f \in \mathrm{End}(X)$ satisfait à une equation de degré 2 à coefficients entiers.

(5) Supposons d'ordre fini, i.e., $f^n = \mathrm{id}$ pour un certain entier positif $n \geq 1$. Montrer que les ordres possibles de f sont

$$1, 2, 3, 4, 6.$$

(Indication : le polynôme cyclotomique a degré $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.)

Supposons qu'il existe $f \in \mathrm{End}(X)$ d'ordre 4.

(6) Montrer qu'il existe des entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$i = a + b\tau, \qquad\qquad i\tau = c + d\tau.$$

et que la matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(7) Déduire que τ appartient à $\mathbb{Z}[i]$.

(8) Montrer que $g_3(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i) = 0$. (On utilisera $i^6 = -1$).

(9) Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ est isomorphe à la courbe elliptique

$$E : \quad y^2 = x^3 + x.$$

(Indication : calculer le j-invariant des deux courbes elliptiques.)

(10) Trouver un automorphisme d'ordre 4 de E.

Exercice 2. Soient X une surface de Riemann compacte et $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ un revêtement fini et non ramifié en déhors de $0, 1, \infty$. On désigne par e_0, e_1, e_∞ les ramifications totales en ces points, i.e.

$$e_0 := \sum_{f(x)=0} (\mathrm{mult}_x(f) - 1),$$

et de manière analogue pour 1 et ∞.

(1) Montrer que si $\deg f \leq 2$ alors X est biholomorphe à $\mathbb{P}^1$.

(2) On classifie les possibilités pour $\deg f = 3$.

(a) Faire la liste complète (à permutation près) des triplets (e_0, e_1, e_∞) possibles pour $\deg f = 3$.

(b) Montrer que dans tous les cas sauf un, X est biholomorphe à $\mathbb{P}^1$ et que dans le cas qui reste X est une courbe elliptique (i.e. de genre 1).

(c) Pour tous les cas avec $X = \mathbb{P}^1$ donner un exemple.

(d) Montrer que pour une courbe elliptique $E = \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ la fonction méromorphe $f(x, y) = y$ est non ramifiée en dehors de 3 points de $\mathbb{P}^1$ si et seulement si $g_2 = 0$, i.e. $j = 0$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Alors son groupe d'automorphismes* $\operatorname{Aut}(X)$ *est fini et*

$$\# \operatorname{Aut}(X) \leq 84(g-1).$$

On admet que le groupe $\operatorname{Aut}(X)$ est fini. Notation :

$$\begin{aligned}
G &= \operatorname{Aut}(X),\\
N &= \text{cardinal de } G,\\
n_x &= \text{cardinal du stabilisateur } \operatorname{Stab}_G(x) \text{ de } x,\\
\pi\colon X \to X/G &= \text{projection sur le quotient.}
\end{aligned}$$

(1) Justifier pourquoi X/G est une surface de Riemann compacte.

(2) Pour $x \in X$ exprimer $\operatorname{mult}_x(\pi)$ en termes de n_x.

(3) Montrer que si $x, x' \in X$ sont tels que $\pi(x) = \pi(x')$, alors $n_x = n_{x'}$. On écrira simplement $n_{\pi(x)}$.

(4) Soit γ le genre X/G. Montrer la relation suivante :

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + \sum_{y \in X/G} N\left(1 - \frac{1}{n_y}\right).$$

(5) Montrer que si $\gamma > 1$ alors $N \geq g - 1$, et si $\gamma = 1$ alors $N \geq 4(g-1)$.

On suppose dans ce qui suit $\gamma = 0$.

(6) Montrer que

$$\sum_{y \in X/G} \left(1 - \frac{1}{n_y}\right) \geq 2,$$

et que π ramifie en au moins 3 points.

(7) Si π ramifie en au moins 5 points, alors $N \leq 4(g-1)$.

(8) Si π ramifie en 3 ou 4 points montrer que

$$\sum_{y \in X/G} \left(1 - \frac{1}{n_y}\right) - 2 \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{42},$$

et conclure.

Exercice 4. On considère la courbe plane $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ donnée par l'équation homogène

$$x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_2x_0^3 = 0.$$

(1) Montrer que C est lisse, i.e. sans points singuliers.

(2) Déduire le genre de g.

On va calculer les points de ramification de la fonction méromorphe $f\colon (x,y) \mapsto y$.

(3) Trouver les nombres complexes λ pour lesquelles l'équation

$$x^3 + \lambda^3 x + \lambda = 0 \tag{$*$}$$

a une racine double. (Le discriminant de $x^3 + ax + b$ est $4a^3 + 27b^2$.)

(4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaisant $(*)$ calculer la multiplicité des points de la forme $(x, \lambda) \in C$.

Pour étudier la situation à l'infini on introduit le changement de variable

$$u = \frac{x_0}{x_1}, \qquad v = \frac{x_2}{x_1}.$$

Dans ces coordonnées on a $f = u/v$.

(5) Calculer la multiplicité de f dans le point $[0 : 1 : 0]$.

(6) En appliquant la formule de Riemann-Hurwitz calculer le genre de C et le comparer avec la question (2).