EXAMEN DE SURFACES DE RIEMANN

28 OCTOBRE 2016

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considére le polynôme homogène de degré $n \geq 1$,

$$f(z_0, z_1, z_2) = z_0^n + z_1^n + z_2^n$$

et la courbe algébrique plane associée $C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$. Pour $i = 0, 1, 2$ soit $U_i = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : z_i \neq 0\}$. On introduit les coordonnées sur U_0,

$$x = \frac{z_1}{z_0}, \qquad y = \frac{z_2}{z_0}.$$

On considère la forme différentielle méromorphe sur C,

$$\omega = \frac{dx}{y^{n-1}}.$$

(1) En dérivant l'égalité $x^n + y^n + 1 = 0$, montrer l'égalité

$$\omega = -\frac{dy}{x^{n-1}}.$$

Conclure que ω n'a ni pôle ni zéro dans $C \cap U_0$.

(2) On introduit le changement de variables

$$u = \frac{z_0}{z_2}, \qquad v = \frac{z_1}{z_2}.$$

Montrer que sur $C \cap U_2$ on a

$$\omega = -u^{n-3} \left(u \frac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + v \right) du.$$

(3) Soient $P_1, \ldots, P_n$ les points d'intersection de C avec la droite $\{z_0 = 0\}$. Montrer l'égalité

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (n-3) P_i.$$

(4) Calculer le genre de C.

On considère la projection sur la première variable

$$\begin{aligned} \pi \colon C \cap U_0 &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ [1 : z_1 : z_2] &\longmapsto z_1. \end{aligned}$$

La fonction π est méromorphe sur C, donc elle induit une application holomorphe $C \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que l'on désigne encore par π.

(5) Caculer le degré de π.

(6) Déterminer les n points de ramification de π.

(7) Pour tout point de ramification P déterminer le diviseur $\pi^*(\pi(P))$.

(8) En utilisant la formule Hurwitz déterminer le genre de C. Comparer le résultat avec (4).

Exercice 2. Soit X une surface de Riemann compacte de genre 1.

(1) En utilisant la dualité de Serre, montrer qu'il existe une forme différentielle holomorphe ω, i.e. une section globale de Ω^1_X, non nulle.

(2) Soit $\varphi\colon \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$ l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $f \mapsto f\omega$. Montrer que φ est un isomorphisme.

(Indication : si φ n'est pas un isomorphisme, que peut-on dire sur le degré de Ω^1_X ?)

(3) À l'aide du théorème de Riemann-Roch montrer que si D est diviseur de degré d sur X, on a

$$h^0(X, \mathcal{O}(D)) = d \qquad \text{si } d > 0,$$
$$h^1(X, \mathcal{O}(D)) = -d \qquad \text{si } d < 0.$$

On fixe un point $A \in X$.

(4) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe f ayant un pôle d'ordre 2 en A et holomorphe ailleurs.

(5) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe g ayant un pôle d'ordre 3 en A et holomorphe ailleurs.

(6) Soient $d \geq 1$, $k = \lfloor d/2 \rfloor$ et $\ell = \lfloor (d-3)/2 \rfloor$. Montrer que les fonctions

$$1, f, f^2, \ldots, f^k, g, fg, \ldots, f^\ell g,$$

forment une base de $H^0(X, \mathcal{O}(dA))$.

(7) Déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_6 \in \mathbb{C}$ tels que

$$g^2 = a_1 fg + a_2 g + a_3 f^3 + a_4 f^2 + a_5 f + a_6.$$

Quitte à remplacer g par $g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2$ on peut supposer $a_1 = a_2 = 0$.

(8) Justifier pourquoi $a_3 \neq 0$.

Quitte à remplacer g par ug avec $u^2 = \frac{1}{a_3}$, on peut supposer

$$g^2 = (f-a)(f-b)(f-c)$$

avec $a, b, c, \in \mathbb{C}$.

(9) Montrer que a, b, c sont distincts.

On considère la fonction $i\colon X \smallsetminus \{A\} \to \mathbb{C}^2$ définie par

$$i(x) = (f(x), g(x)).$$

Soit C la courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'équation $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$.

(10) Montrer que C n'a pas de points singuliers.

(11) Monter que i est injective et s'étend en un biholomorphisme

$$i\colon X \xrightarrow{\sim} C.$$

Exercice 3. Soient X une surface de Riemann compacte et $\mathcal{M}_X$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X. Le but de la première partie de l'exercice est de montrer $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X et pour tout $i, j \in I$ soit f une fonction méromorphe sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$. On suppose, pour tout $i, j, k \in I$,

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0.$$

On veut montrer que la classe $[(f_{ij})]$ dans $H^1(X, \mathcal{M}_X)$ est nulle. On *admet* que, quitte à passer à un raffinement, on peut toujours supposer que le nombre total des pôles des f_{ij} est fini.

(1) Montrer qu'il existe un diviseur D sur X tel que $f_{ij} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}_X(D))$ pour tout $i, j \in I$.

(2) Montrer qu'il existe un diviseur $D' \geq D$ et des fonctions $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{O}(D'))$ telles que, pour tout $i, j \in I$,
$$f_{ij} = f_i - f_j.$$

(3) Déduire que la classe $[(f_{ij})]$ dans $H^1(X, \mathcal{M}_X)$ est nulle, et donc
$$H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0.$$

Le faisceau $\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ s'identifie naturellement au faisceau des formes différentielles méromorphes sur X. On s'intéresse à la suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \longrightarrow (\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \longrightarrow 0.$$

Une section globale du faisceau $(\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ est la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ et, pour tout $i \in I$, d'une forme différentielle méromorphe ω_i sur U_i telle que, pour tout $i, j \in I$, la forme différentielle $\omega_i - \omega_j$ est holomorphe sur $U_i \cap U_j$.

(4) Soit ω une forme différentielle méromorphe sur X. Montrer que l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules
$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{M}_X & \longrightarrow & \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \\ & f & \longmapsto & f\omega, \end{array}$$
est un isomorphisme.

(5) Déduire $H^1(X, \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X) = 0$.

(6) Conclure que l'homomorphisme naturel
$$\theta\colon H^0(X, \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(X, (\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X),$$
n'est jamais surjectif.

On va construire un exemple d'élément de $H^0(X, (\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X)$ qui n'est pas dans l'image de θ. Soit $x \in X$ un point et soit

$$\alpha\colon U_0 \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

une carte autour de x telle que $\alpha(x) = 0$. Soit $U_1 = X - \{x\}$.

On considère la section globale s de $(\mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ qui correspond à la donnée des formes différentielles méromorphes,

$$\omega_0 = \frac{1}{z} dz, \qquad \omega_1 = 0,$$

respectivement sur U_0 et U_1.

(7) Justifier pourquoi s n'appartient pas à l'image de θ.