Partiel du 7 novembre 2019

Durée : 1h30. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + 4y^2 + z^2 + t^2 + 4xy - 2xz + 2xt + 4yt.$$

1. Écrire la matrice de la forme quadratique Q.
2. Déterminer le rang et le noyau de Q.
3. Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de Q.
5. Déterminer une base orthogonale pour Q.
6. Est-ce que le cône isotrope de Q coïncide avec le noyau de Q ? Pourquoi ?
7. On considère la quadrique $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x, y, z, 1) = 0\}$. Quelle est la nature de cette quadrique ?

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$V_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1 + \lambda e_2 + e_3), \qquad W_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\lambda x - y - z = 0\}.$$

1. Déterminer des équations cartésiennes pour V_λ.
2. Déterminer des équation paramétriques pour W_λ.
3. En fonction de λ, déterminer l'intersection de V_λ et W_λ.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. Pour des matrices carrées de taille n et à coefficients réels $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\phi(A, B) := \mathrm{Tr}({}^t AB).$$

1. Montrer que l'application $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\langle x, y \rangle = {}^t xy$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'identité :

$$ {}^t AA = \begin{pmatrix} \langle Ae_1, Ae_1 \rangle & \langle Ae_1, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_1, Ae_n \rangle \\ \langle Ae_2, Ae_1 \rangle & \langle Ae_2, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_2, Ae_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Ae_n, Ae_1 \rangle & \langle Ae_n, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_n, Ae_n \rangle \end{pmatrix}.$$

(*Indication* : Calculer $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$).

3. Déduire que ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n\,\mathrm{Tr}(A^2)$. Quand a-t-on égalité ?