Partiel du 7 novembre 2019

Durée : 1h30. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + 4y^2 + z^2 + t^2 + 4xy - 2xz + 2xt + 4yt.$$

1. Écrire la matrice de la forme quadratique Q.
2. Déterminer le rang et le noyau de Q.
3. Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de Q.
5. Déterminer une base orthogonale pour Q.
6. Est-ce que le cône isotrope de Q coïncide avec le noyau de Q ? Pourquoi ?
7. On considère la quadrique $\mathcal{Q} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x,y,z,1) = 0\}$. Quelle est la nature de cette quadrique ?

Solution. (1) La matrice de la forme quadratique Q est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) En faisant les opérations sur les lignes $L_1 - L_4 \to L_1$, $L_2 - 2L_4 \to L_2$ on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3. La matrice est de rang 3 et son noyau est engendré par $e_2 - 2e_4$.

(3) En appliquant la méthode de Gauss, on trouve

$$Q(x,y,z,t) = (x + 2y - z + t)^2 + 2z(2y + t).$$

On consière les formes linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1(x,y,z,t) &= x + 2y - z + t, \\ \ell_2(x,y,z,t) + \ell_3(x,y,z,t) &= 2y + t, \\ \ell_2(x,y,z,t) + \ell_3(x,y,z,t) &= z. \end{aligned}$$

Alors $Q(x,y,z,t) = \ell_1(x,y,z,t)^2 + 2\ell_2(x,y,z,t)^2 - 2\ell_3(x,y,z,t)^2$.

(4) La signature est $(2,1)$.

(5) Puisque Q n'est pas de rang maximal, il faut compléter la base des formes linéaires données par la décomposition en somme de carrés. Pour ce faire, on pose $\ell_4(x,y,z,t) = t$. Une

base orthogonale est donnée par les colonnes de l'inverse de la matrice P ayant pour lignes les formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_4$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1}. On commence par les opérations sur les lignes $(L_2 + L_3 - L_4)/2 \to L_2$ et $L_2 - L_3 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On termine par l'opération $L_1 - 2L_2 + L_3 - L_4 \to L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Une base orthogonale est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Remarque : v_4 est une base du noyau, comme il faut s'attendre.)

(6) La forme Q n'est ni positive ni négative, donc il existe des vecteurs isotropes qui ne sont pas dans le noyau. Par exemple, $v_2 + v_3$ fera l'affaire.

(7) En reprenant la décomposition trouvée au point (3), on pose

$$\begin{aligned} x' &= \ell_1(x, y, z, 1) = x + 2y + z - 1, \\ y' &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ell_2(x, y, z, 1) = \tfrac{1}{2}\left(y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\right), \\ z' &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ell_3(x, y, z, 1) = \tfrac{1}{2}\left(y - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

On a alors $Q(x, y, z, 1) = x'^2 + y'^2 - z'^2$ qui est la forme canonique d'un cône. □

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$V_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1 + \lambda e_2 + e_3), \qquad W_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\lambda x - y - z = 0\}.$$

1. Déterminer des équations cartésiennes pour V_λ.
2. Déterminer des équation paramétriques pour W_λ.
3. En fonction de λ, déterminer l'intersection de V_λ et W_λ.

Solution. (1) L'espace vectoriel V_λ est de dimension 1 dans un espace de dimension 3. On doit trouver 2 équations. Par exemple, les deux suivantes conviennent : $x_1 - x_3 = 0$, $\lambda x_1 - x_2 = 0$.

(2) L'espace vectoriel W_λ est de dimension 2. Une base de W_λ est, par exemple,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\lambda \end{pmatrix}.$$

On trouve les équation paramétriques suivantes, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $x_1 = \alpha+\beta$, $x_2 = 2\lambda\alpha$, $x_3 = 2\lambda\beta$.

(3) En utilisant l'équation paramétrique de V_λ et l'équation cartésienne de W_λ, on a

$$V_\lambda \cap W_\lambda = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, (\lambda - 1)\alpha = 0 \right\}.$$

Si $\lambda \neq 1$, l'intersection de V_λ et W_λ est réduite à 0. Si $\lambda = 1$, l'espace vectoriel V_λ est contenu dans W_λ et donc $V_\lambda \cap W_\lambda = V_\lambda$. □

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. Pour des matrices carrées de taille n et à coefficients réels $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\phi(A, B) := \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

1. Montrer que l'application $\phi \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique. (*Indication :* on admettra l'identité $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$ pour $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\langle x, y \rangle = {}^txy$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'identité :

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} \langle Ae_1, Ae_1 \rangle & \langle Ae_1, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_1, Ae_n \rangle \\ \langle Ae_2, Ae_1 \rangle & \langle Ae_2, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_2, Ae_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Ae_n, Ae_1 \rangle & \langle Ae_n, Ae_2 \rangle & \cdots & \langle Ae_n, Ae_n \rangle \end{pmatrix}.$$

(*Indication* : Calculer $\langle Ae_i, Ae_j \rangle$).

3. Déduire que ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n\,\mathrm{Tr}(A^2)$. Quand a-t-on égalité ?

Solution. (1) Pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ et $A, A', B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda A + \lambda' A', B) &= \mathrm{Tr}({}^t(\lambda A + \lambda' A')B) \\ &= \mathrm{Tr}((\lambda {}^tA + \lambda' {}^tA')B) \\ &= \mathrm{Tr}(\lambda {}^tAB + \lambda' {}^tA'B) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}({}^tAB) + \lambda'\,\mathrm{Tr}({}^tA'B) \\ &= \lambda\phi(A, B) + \lambda'\phi(A', B). \end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire dans la première variable. Puisque la trace est invariante par transposition, on a

$$\phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \phi(B, A).$$

L'application ϕ est donc symétrique. Puisque ϕ est symétrique et linéaire dans la deuxième variable, elle est linéaire aussi dans la deuxième variable.

(2) On a $\langle Ae_i, Ae_j \rangle = {}^t(Ae_i)Ae_j = {}^te_i{}^tAAe_j$. Or, pour une matrice $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, on a ${}^te_iBe_j = b_{ij}$. En appliquant cette remarque avec $B = {}^tAA$ on obtient l'énoncé.

(3) D'après la question (2) on a

$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, Ae_i \rangle.$$

Comme un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive, pour $i = 1, \ldots, n$ on $\langle Ae_i, Ae_i \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $Ae_i = 0$. Il en résulte que $\phi(A, A) \geq 0$ avec égalité si et seulement si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $Ae_i = 0$. Or une application linéaire est nulle si et seulement si elle s'annule sur une base. Donc $\phi(A, A)$ s'annule si et seulement si A est nulle.

(4) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire ϕ. Pour des matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{Tr}({}^t AB)^2 \leq \mathrm{Tr}({}^t AA)\,\mathrm{Tr}({}^t BB),$$

avec égalité si et seulement si A, B sont liées. Si A est symétrique on a $\mathrm{Tr}({}^t AA) = \mathrm{Tr}(A^2)$. En prenant $B = \mathrm{id}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathrm{Tr}(A)^2 \leq \mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(\mathrm{id}) = n\,\mathrm{Tr}(A^2),$$

avec égalité si seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda\,\mathrm{id}$. $\square$