Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ?

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\0 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Solution. Voici les réponses résumées dans un tableau :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
échelonnée	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	non
échelonnée réduite	non	oui	oui	oui	non	oui	non	non	non	oui	oui	non

□

Exercice 2. Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2×2 échelonnées réduites.

Solution. Voici la liste :

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & a\\0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

où a est un nombre réel. □

Exercice 3. Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée réduite. En déduire leur rang.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 7\\2 & -1 & 5\\-1 & -3 & -9\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 13\\1 & -2 & 3 & 17\\-1 & 3 & -3 & -20\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3 & 3 & -2 & 0 & -1\\-1 & -1 & 1 & 3 & 1\\2 & 2 & -1 & 2 & 2\\0 & 0 & 1 & 8 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 3 & 3\\1 & 2 & 2 & 5 & 8\\1 & 0 & -1 & 0 & 1\\1 & 1 & -3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution. Voici les formes échélonnées réduites des différentes matrices :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\0 & 1 & 0 & -3\\0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 13\\0 & 0 & 1 & 0 & 20\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

En déduit qu'elles ont respectivement rang 2, 1, 2, 3, 3, 3, 3. □

Exercice 4. Traiter les problèmes suivants en les traduisant sous la forme d'un système d'équations linéaires.

a) Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Brigitte achète le livre de grammaire anglaise et un livre de physique pour 64 euros au total. Claude dépense 98 euros avec un livre d'algèbre linéaire et le livre de grammaire anglaise, tandis que Denise achète le livre d'algèbre linéaire et le livre de physique, pour 76 euros. Combien coûte chaque livre ?

b) *D'après l'Anthologie grecque de Metrodore, VIe siècle ap. J.-C.*
Fabrique-moi une couronne qui pèse 60 mines, faite d'or, de bronze, d'étain et de fer forgé. L'or et le bronze ensemble en feront les deux tiers, l'or et l'étain les trois quarts, l'or et le fer les trois cinquièmes. Dis-moi de combien d'or, d'étain, de bronze et de fer tu dois faire usage ?

c) *"Les neuf chapitres sur l'art mathématique", IIe siècle av. J.C.*
Supposons qu'1 directeur, 5 officiers secondaires et 10 laquais mangent 10 poulets ; 10 directeurs, 1 officier secondaire et 5 laquais mangent 8 poulets ; 5 directeurs, 10 officiers secondaires et 1 laquais mangent 6 poulets. On demande combien de poulets mangent respectivement un directeur, un officier secondaire et un laquais.

Solution. a) Soit x le prix de la grammaire, y celui de livre de physique et z celui du livre d'algèbre linéaire. On a le systéme suivant :

$$\begin{cases} x + y = 64 \\ x + z = 98 \\ y + z = 76 \end{cases}$$

En résolvant les système on obtient $x = 43$, $y = 21$ et $z = 55$.

b) Soit x la quantité d'or, y du bronze, z de l'étain et t du fer. On a le systéme linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \\ x + z = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45 \\ x + t = \frac{3}{5} \cdot 60 = 36 \\ x + y + z + t = 1 \cdot 60 = 60 \end{cases}$$

En résolvant le systéme on trouve $x = \frac{71}{2}$, $y = \frac{19}{2}$, $z = \frac{29}{2}$ et $t = \frac{11}{2}$.

c) Soit x le nombre de poulets mangés par un directeur, y par un officier secondaire et z par un laquais. On obtient le systéme suivant :

$$\begin{cases} x + 5y + 10z = 10 \\ 10x + y + 5z = 8 \\ 5x + 10y + z = 6 \end{cases}$$

En résolvant le systéme on trouve $x = \frac{45}{122}$, $y = \frac{41}{122}$ et $z = \frac{97}{122}$. □

Exercice 5. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donné par les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Donner une équation paramétrique de ce sous-espace vectoriel et le décrire d'un point de vue géométrique.

Solution. Il s'agit un systéme linéaire à 3 variables et de rang 2, les deux lignes étant linéairement indépendantes (elles ne sont pas le multiple l'une de l'autre). Le théorème du rang dit que l'espaces des solutions a dimension $3-2=1$. En soustrayant la première ligne à la deuxième on se raméne au systéme suivant :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première on trouve :

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Une solution $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ du système est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un réel x_3. Autrement dit l'espace des solutions est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(-3, 2, 1)$. □

Exercice 6. On considère le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dirigé par les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 6)$. Donner une équation paramétrique de ce plan. À partir de ce paramétrage, obtenir une équation cartésienne de ce plan.

Solution. Un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ du plan engendré par $v = (1, 2, 3)$ et $w = (4, 5, 6)$ est par définition une combinaison linéaire de v et w, à savoir, il existe des nombres réels λ, μ tels que

$$x = \lambda v + \mu w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 4\mu \\ 2\lambda + 5\mu \\ 3\lambda + 6\mu \end{pmatrix},$$

d'où les équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda & + & 4\mu, \\ x_2 & = & 2\lambda & + & 5\mu, \\ x_3 & = & 3\lambda & + & 6\mu. \end{cases}$$

En exprimant λ et μ en termes de x_1, x_2, x_3 dans le systéme précédent on trouve que x_1, x_2 et x_3 satisfont à la relation suivante :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

qui est l'équation du plan en question. □

Formes linéaires, dualité

Exercice 7. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Construire une base de E, qu'on notera (e_1, e_2).

Solution. (1) Il s'agit d'un systéme à une équation (non nulle) et 3 variables. Le théorème du rang affirme que l'espace des solutions a dimension $3 - 1 = 2$.

(2) On peut prendre par exemple $e_1 = (1, -1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, -1)$. □

Exercice 8. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer qu'il existe trois formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbf{R}^3$ telles que pour tout i, j,

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

3. Calculer les coordonnées de l_1, l_2, l_3 dans la base de l'espace des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$e_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad e_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad e_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

La base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est appelée base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ tandis que la base (l_1, l_2, l_3) est la base duale de (v_1, v_2, v_3).

Solution. (1) On considére la matrice P avec les vecteurs v_i comme colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant les opérations $L_3 - L_2 \to L_2$ et $L_3 - L_1 \to L_3$ on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est en forme échélonnée et a 3 pivots. La matrice est donc de rang 3 et les vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^3$.

(2) C'est le théorème du cours sur l'existence des bases duales.

(3) La matrice P est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base v_1, v_2, v_3. La base duale l_1, l_2, l_3 est donnée par les lignes de l'inverse de P. On a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En considérant les lignes de cette matrice on a

$$\begin{aligned} l_1 &= 2e_1^* - 3e_2^* - 2e_3^* \\ l_2 &= e_1^* - 2e_2^* \\ l_3 &= -e_1^* + 2e_2^* + e_3^*. \end{aligned}$$

□

Exercice 9. Soit l_1, l_2, l_3 les formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3, \qquad l_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_3.$$

Trouver trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Solution. La base v_1, v_2, v_3 de $\mathbf{R}^3$ qu'on cherche est telle que les formes linéaires l_1, l_2, l_3 forment sa base duale. Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base v_1, v_2, v_3 alors les formes linéaires l_1, l_2, l_3 sont les lignes de la matrice P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En calculant l'inverse on trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En prenant les colonnes de cette matrice, on trouve

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 10. On considère les deux formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^3$:

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

1. Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.
2. Trouver une forme linéaire l_3 telle que la famille (l_1, l_2, l_3) soit une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$.

Solution. (1) Il s'agit de deux formes linéaires non nulle et $l_1(e_2) = 0$ alors que $l_2(e_2) = 1$. Elle ne peuvent donc pas être linéairement dépendantes.

(2) Il suffit de prendre la forme linéaire $l_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$. En effet, en mettant les formes lináires comme lignes d'une matrice, on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En soustrayant la première ligne à la deuxième, on obtient une matrice échélonnée avec 3 pivots et donc de rang 3. □

Exercice 11. On considère les trois formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_3 + x_4, \\ l_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 + x_4, \\ l_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

1. Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.
2. Trouver une forme linéaire l_4 telle que la famille (l_1, l_2, l_3, l_4) soit une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{R}^4$.

Solution. (1) On écrit la matrice ayant les formes linéaires l_1, l_2, l_3 comme lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant l'opération $L_3 - L_1 - 2L_2 \to L_3$ on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

qui est échélonnée avec 3 pivots, donc de rang 3.

(2) Il suffit de prendre $l_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$. En effet la matrice qu'on obtient en ajoutant la forme linéaire l_4 comme quatrième ligne est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

En échangeant la troisième et quatrième ligne on trouve une matrice échélonnée avec 4 pivots, donc de rang 4. □