Formes bilinéaires, formes quadratiques

Exercice 1. Déterminer, parmi les applications suivantes, quelles sont les applications bilinéaires sur l'espace vectoriel E spécifié.

1. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 + x_1y_2$;
3. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_2 + x_1)y_2$;
4. $E = M_n(\mathbf{R})$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.
5. $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles,

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \qquad \text{pour tout } f, g \in C^0([0, 1], \mathbf{R}).$$

6. $E = \mathbf{R}^2$,

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les résultas sont résumés dans le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
bilinéaire	oui	non	oui	oui	oui	oui
symétrique	oui	-	oui	oui	oui	non

□

Exercice 2. Soit $E = \mathbf{R}^2$. On note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

Pour les formes bilinéaires suivantes, écrire leur matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, calculer leur rang et leur noyau et déterminer si elles sont symetriques.

1. $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $\varphi_2(x, y) = x_1y_2$;
3. $\varphi_3(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$;
4. $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$;
5. $\varphi_5(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$;
6. $\varphi_6(x, y) = x_1y_1$;
7. $\varphi_7(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;
8. $\varphi_8(x, y) = x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$.

Étant donnée une forme symétrique φ parmi les précédentes, déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(x, x) = 0\}$ et le comparer avec le noyau.

Solution. Noyau et cône isotrope n'ont été définis que pour des formes bilinéaires symétriques. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	matrice	symétrique	rang	noyau	cône isotrope
1	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	oui	2	0	0
2	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	non	1	-	-
3	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$	oui	2	0	$\mathrm{Vect}\binom{1}{0} \cup \mathrm{Vect}\binom{0}{1}$
4	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	oui	2	0	$\mathrm{Vect}\binom{1}{1} \cup \mathrm{Vect}\binom{1}{-1}$
5	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$	non	2	-	-
6	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	oui	1	$\mathrm{Vect}\binom{0}{1}$	$\mathrm{Vect}\binom{0}{1}$
7	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$	oui	1	$\mathrm{Vect}\binom{1}{-1}$	$\mathrm{Vect}\binom{1}{-1}$
8	$\left(\begin{smallmatrix}1&-3/2\\-3/2&6\end{smallmatrix}\right)$	oui	2	0	0

Pour le calcul du cône isotrope de ϕ_8 on remarque :

$$\phi_8(x,x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 = \left(x_1 - \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{15}{4}x_2^2.$$

Comme la somme de termes positifs est positive, $\phi_8(x,x) = 0$ si et seulement si $x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$ et $x_2 = 0$, ce qui revient à dire $x_1 = x_2 = 0$. □

Exercice 3. On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbf{R}^3$:

$$Q_0(x,y,z) = x^2+y^2+xz, \quad Q_1(x,y,z) = 2x^2+6xy-2xz+y^2+4yz-3z^2, \quad Q_2(x,y,z) = xy+3xz.$$

1. Pour chacune d'elles, écrire la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire symétrique associée et déterminer son rang et son noyau.
2. Décomposer Q_0, Q_1 et Q_2 en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et déterminer pour chacune la signature et le rang.
3. Donner une base orthogonale pour chacune de ces formes quadratiques.

Solution. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	matrice	rang	noyau	décomposition en somme de carrés	signature
Q_0	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1/2\\0&1/2&0\end{pmatrix}$	3	0	$(x+\frac{1}{2}z)^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2$	(2, 1)
Q_1	$\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&1&2\\-1&2&-3\end{pmatrix}$	2	$\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$	$(y+3x+2z)^2 - 7(x+z)^2$	(1,1)
Q_2	$\begin{pmatrix}0&1/2&3/2\\1/2&0&0\\3/2&0&0\end{pmatrix}$	2	$\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}(x+y+3z)^2 - \frac{1}{4}(x-y-3z)^2$	(1,1)

On détaille les décomposition en sommes de carrés :

$$\begin{aligned}
Q_0(x,y,z) &= (x+\tfrac{1}{2}z)^2 - \tfrac{1}{4}z^2 + y^2,\\
Q_1(x,y,z) &= (y+3x+2z)^2 - 7(x^2+z^2+xz) = (y+3x+2z)^2 - 7(x+z)^2,\\
Q_2(x,y,z) &= x(y+3z) = \tfrac{1}{4}(x+y+3z)^2 - \tfrac{1}{4}(x-y-3z)^2.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième forme on a commencé par la variable y plutôt que la variable x pour ne pas devoir diviser par 2. □

Exercice 4. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbf{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont les suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles, écrire la forme quadratique associée $q_i(x_1, x_2, x_3)$ puis écrire q_i comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de q_i.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz), \\ q_2(x,y,z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz), \\ q_3(x,y,z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz). \end{aligned}$$

En appliquant l'algorithme de Gauss pour l'écriture d'un forme quadratique comme somme de carrés de formes linéaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q_1(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 + z^2 + \frac{2}{3}yz\right) \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}z^2, \\ \frac{1}{2}q_2(x,y,z) &= \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 + z^2 - 2yz\right) = \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - z\right)^2, \\ \frac{1}{2}q_3(x,y,z) &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - yz = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2. \end{aligned}$$

Les formes quadratiques q_1, q_2 et q_3 sont respectivement de signature $(3,0)$, $(2,0)$ et $(3,0)$. Dans le premier on peut aussi remarque l'idéntité suivante :

$$q_1(x,y,z) = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2,$$

d'où on a à nouveau que q_1 est de signature $(3,0)$ (il est important de remarquer que les formes linéaires $x+y$, $x+z$, $y+z$ sont linéairement indépendantes). $\square$

Exercice 5. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$Q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz.$$

1. Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner la signature de Q et son rang.
3. Donner une base de $\mathbf{R}^3$ orthogonale pour la forme quadratique Q.

Solution. (1) En appliquant l'algorithme de Gauss (en commençant par x^2) on trouve

$$Q(x,y,z) = (x + 2y + z)^2 + y^2 + 2yz = (x + 2y + z)^2 + (y+z)^2 - z^2.$$

(2) La signature de Q est $(2,1)$. Son rang est 3.

(3) Comme la forme quadratique Q est de rang maximale, une base orthogonale pour Q est donnée par les colonnes de l'inverse de la matrice ayant pour lignes les formes linéaires trouvées dans la décomposition en somme de carrés. Il s'agit de calculer l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant les opérations sur les lignes $L_1 - 2L_2 + L_3 \to L_1$, $L_2 - L_3 \to L_2$ on obtient que l'inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthogonale pour la forme quadratique Q est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 6. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie par

$$Q(x, y, z, t) = xy + xz - xt + yz + yt.$$

1. Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. À quoi est égal le noyau de Q ?
3. Donner un exemple de vecteur $v \in \mathbf{R}^4$ non nul tel que $Q(v) = 0$. Comment s'appelle un tel vecteur ?

Solution. (1) En appliquant l'algorithme on trouve

$$Q(x, y, z, t) = (x + z + t)(y + z - t) - z^2 + t^2.$$

On posant

$$\ell_1(x, y, z, t) + \ell_2(x, y, z, t) = x + z + t,$$
$$\ell_1(x, y, z, t) - \ell_2(x, y, z, t) = y + z - t,$$

on trouve

$$Q(x, y, z, t) = \ell_1(x, y, z, t)^2 - \ell_2(x, y, z, t)^2 + z^2 + t^2.$$

(2) Le noyau est nul car la forme a rang 4.

(3) Le carré d'aucune des variables apparaît dans l'écriture de Q. Il suit que tout vecteur de la base canonique e_1, e_2, e_3, e_4 est *isotrope*, c'est-à-dire annulé par Q. □

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles définies sur E. On pose pour tout $x \in E$,

$$Q(x) = l_1(x)\, l_2(x).$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E en explicitant la forme bilinéaire associée.

2. En déduire le noyau et le rang de Q.
3. On se place sur $E = \mathbf{R}^3$ et on considère les formes linéaires l_1 et l_2 données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2.$$

Donner les coordonnées de l_1 et l_2 dans la base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ sous forme de vecteurs lignes et calculer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Solution. (1) La forme bilinéaire symétrique $\phi(v, w) := \frac{1}{2}l_1(v)l_2(w)+\frac{1}{2}l_1(w)l_2(v)$ satisfait $Q(v) = \phi(v, v)$ pour tout $v \in E$. Donc ϕ est la forme polaire de Q.

(2) On commence en démontrant l'égalité $\ker Q = \ker(l_1) \cap \ker(l_2)$, en montrant les deux inclusions :

($\supseteq$) Soient $v \in \ker(l_1) \cap \ker(l_2)$ et $w \in E$. Alors $\phi(v, w) = \frac{1}{2}l_1(v)l_2(w) + \frac{1}{2}l_1(w)l_2(v) = 0$, donc $v \in \ker Q$.

($\subseteq$) Soit $v \in \ker Q$. Soient $\lambda_1 = l_1(v)$ et $\lambda_2 = l_2(v)$. Pour tout $w \in E$, on a

$$\lambda_1 l_2(w) + \lambda_2 l_1(w) = \phi(v, w) = 0,$$

car v appartient au noyau de Q. Ceci signifie que la forme linéaire $\lambda_1 l_2 + \lambda_2 l_1$ est nulle. D'autre part, l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes par hypothèse, donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Autrement dit, $v \in \ker l_1 \cap \ker l_2$.

Supposons E de dimension finie n. Pour calculer le rang, on se ramène à calculer la dimension de $\ker(l_1) \cap \ker(l_2)$. Pour $i = 1, 2$, comme la forme linéaire l_i est non nulle, le théorème du rang dit que $\dim \ker(l_i) = n - 1$. Par la formule des dimensions on a :

$$\dim(\ker(l_1) \cap \ker(l_2)) = \dim(\ker(l_1) + \ker(l_2)) - \dim \ker(l_1) - \dim \ker(l_2)$$

Comme $\ker(l_1) + \ker(l_2)$ a au plus dimension n et $\ker(l_1) \cap \ker(l_2)$ a au plus dimension $n - 1$, on a

$$n - 2 \leq \dim(\ker(l_1) \cap \ker(l_2)) \leq n - 1.$$

Supposons par l'absurde $\dim(\ker(l_1) \cap \ker(l_2)) = n - 1$. Par raison de dimensions, on a

$$\ker(l_1) = \ker(l_1) \cap \ker(l_2) = \ker(l_2).$$

Appelons F cet espace vectoriel. Soit $v \in E \setminus F$. Alors, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + \lambda v$ avec $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, 2$ on a

$$l_i(x) = l_i(y) + \lambda l_i(v) = \lambda l_i(v),$$

car y appartient à $F = \ker(l_i)$. D'autre part, $\alpha_i := l_i(v) \neq 0$ parce que v n'appartient pas à $F = \ker(l_i)$. La forme linéaire $\alpha_2 l_1 - \alpha_1 l_2$ est nulle : en effet, avec les notations ci-dessus, pour tout $x \in E$ on a

$$\alpha_2 l_1(x) - \alpha_1 l_2(x) = \lambda l_2(v)l_1(v) - \lambda l_1(v)l_2(v) = 0.$$

Comme l_1, l_2 sont linéairement indépendantes, on doit avoir forcément $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Contradiction !

On a trouvé finalement que $\dim(\ker(l_1) \cap \ker(l_2)) = n - 2$, donc Q est de rang 2.

(3) Les matrices lignes des formes linéaires l_1, l_2 sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice de la forme quadratique $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Coniques et quadriques

Exercice 8. On considère les coniques du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ données par les équations

$$C_1 : 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 10x - 1 = 0,$$
$$C_2 : 3x^2 - 4xy + 2y - 1 = 0,$$
$$C_3 : x^2 + 4xy + 4y^2 + x - 4 = 0.$$

Déterminer la nature géométrique de ces coniques. Pour les hyperboles, on déterminera les droites asymptotes. Pour les ellipses, on déterminera leur centre. Dessiner ces coniques.

Démonstration. (1) Il s'agit d'une ellipse. En effet on a $ac - \frac{b^2}{4} = 10 - 4 = 6 > 0$. Pour en calculer le centre, on applique l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 10x - 1 &= 2(x+y)^2 + 3y^2 - 10x - 1 \\ &= 2x'^2 + 3y'^2 - 10(x' - y') - 1 \\ &= 2(x' - \tfrac{5}{2})^2 + 3(y' + \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{2} - \tfrac{25}{3} - 1, \end{aligned}$$

où on a posé $x' = x + y$ et $y' = y$. Le centre a coordonnées $x' = \frac{5}{2}$ et $y' = \frac{5}{3}$ ou encore $x = \frac{25}{6}$ et $y = \frac{5}{3}$.

(2) Il s'agit d'un hyperbole. En effet, on a $ac - \frac{b^2}{4} = 0 \cdot 3 - 4 < 0$. La partie quadratique de l'équation de C_2 se décompose s'écrit $3x^2 - 4xy = x(3x - 4y)$. Si (x_0, y_0) désigne le centre de C_2, les deux asymptotes de C_2 sont $x = x_0$ et $3(x - x_0) = 4(y - y_0)$. Pour calculer le center, on applique l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4xy + 2y - 1 = x(3x - 4y) + 2y - 1 &= x'^2 - y'^2 + x' + 2y' - 1 \\ &= (x' + \tfrac{1}{2})^2 - (y' - 1)^2 - \tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

où on a posé $x = x' + y'$ et $3x - 4y = x' - y'$. Dans les variables x', y' le centre a cordonnées $(-\frac{1}{2}, 1)$. Dans les variables x, y le centre a coordonnées $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Les asymptotes ont donc équations $x = \frac{1}{2}$ et $3(x - \frac{1}{2}) = 4(y + \frac{3}{2})$.

(3) Il s'agit d'une parabole. En effet, on a $ac - \frac{b^2}{4} = 4 - 4 = 0$. □

Exercice 9. Déterminer la nature géométrique des quadriques de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$Q_1 : xy + 3xz + z = 0,$$
$$Q_2 : xy + yz + zx + 2y + 1 = 0,$$
$$Q_3 : 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 5 = 0,$$
$$Q_4 : x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 4z - 4y + 2x + 1 = 0.$$

Démonstration. (1) Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique. En effet, en appliquant l'algorithme de Gauss, on trouve

$$xy + 3xz + z = x(y + 3z) + z = x'^2 - y'^2 - z',$$

où on a posé $x = x' + y'$, $y + 3z = x' - y'$ et $z = -z'$.

(2) Il s'agit d'un hyperboloïde de révolution à une nappe. En effet, en appliquant l'algorithme de Gauss, on trouve

$$\begin{aligned} xy + yz + zx + 2y + 1 &= (x + z)(y + z) - z^2 + 2y + 1 \\ &= x'^2 - y'^2 - z'^2 + 2(x' + y' - z') + 1, \end{aligned}$$

où $x+z=x'+y'$, $y+z=x'-y'$ et $z=z'$.

(3) Il s'agit d'un ellipsoïde. En effet, en appliquant l'algorithme de Gauss, on trouve

$$2x^2+y^2+2z^2+2xz-5=2(x+\tfrac{1}{2}z)^2+\tfrac{3}{2}z^2+y^2-5.$$

(4) Il s'agit d'un cône. En effet, en appliquant l'algorithme de Gauss, on trouve

$$x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz-4z-4y+2x+1=(x-2y-2z+1)^2-3(y+\tfrac{4}{3}z)^2-\tfrac{7}{3}z^2,$$

et on conclut en posant $x'=x-2y-2z+1$, $y'=y+\frac{4}{3}z$ et $z'=z$. □

Exercice 10.

1. De quelle nature est la quadrique de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z=xy$? Que peut-on dire de son intersection avec le plan horizontal passant par l'origine ?
2. On considère deux droites de $\mathbf{R}^3$ passant par le point de coordonnées $(0,0,1)$ et dirigées respectivement par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,-1,0)$. Trouver l'équation d'un paraboloïde hyperbolique contenant ces deux droites. *Indication : trouver l'équation du plan contenant les droites.*

Solution. (1) En posant $x=x'+y'$, $y=x'-y'$ et $z'=z$, on trouve $z'=x'^2-y'^2$. Il s'agit donc d'un paraboloïde hyperbolique. L'intersection avec le plan $z=0$ est l'union de la droite dirigée par le vecteur e_1 et la droite dirigée par le vecteur e_2.

(2) Comme suggéré on cherche l'équation du plan passant par le point $(0,0,1)$ et dont la direction est l'espace vectoriel engendré par $(1,1,1)$ et $(1,-1,0)$. On remarque que la forme linéaire $x+y-2z$ annule ce deux vecteurs, donc l'équation du plan est

$$(x-0)+(y-0)-2(z-1)=0.$$

On observe que la droite passant par le point $(0,0,1)$ et de direction $(1,1,1)$ a équations :

$$\begin{cases} x+y-2z=-2, \\ x-y=0. \end{cases}$$

De manière similaire, la droite passant par le point $(0,0,1)$ et de direction $(1,-1,0)$ a équations :

$$\begin{cases} x+y-2z=-2, \\ x+y=0. \end{cases}$$

En s'inspirant de la question (1), un paraboloïde qui satisfait les propriétés démandées est celui d'équation :

$$x+y-2(z-1)=(x-y)(x+y).$$

□

Exercice 11. On se place dans $\mathbf{R}^3$.

1. Donner la liste des types de quadriques dont la forme quadratique est non dégénérée.
2. Montrer que pour chacune de ces quadriques, il existe un point tel que la symétrie centrale relativement à ce point laisse invariante la quadrique.
3. Calculer ce centre de symétrie pour la quadrique d'équation :

   $$z^2+2z+xy+y=0.$$

   Quelle est la nature de cette quadrique ?

Solution. (1) La 'forme quadratique' dont il est question est la partie quadratique de l'équation de la quadrique. Voici la liste des quadriques avec leur forme canonique :

Ellipsoïde	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
Hyperboloïde à une nappe	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$
Hyperboloïde à deux nappes	$x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$
Cône	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
Point	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
Vide	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$

(2) Étant donnée l'une de ces coniques, on peut se ramener à sa forme canonique par une transformation affine. Les équations canoniques ci-dessus sont variantes par le changement de coordonnées $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Autrement dit, elles sont stables par symétrie centrale.

(3) En posant $x = x' + y'$, $y = x' - y'$ et $z' = z$ on trouve

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + xy + y &= x'^2 - y'^2 + z'^2 + 2z' + x' - y' \\ &= (x' + \tfrac{1}{2})^2 - (y' + \tfrac{1}{2})^2 + (z' + 1)^2 - 1, \end{aligned}$$

donc il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe. Le centre de la symétrie a coordonnées $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ dans les variables x', y', z' et coordonnées $(-1, 0, -1)$ dans les variables x, y, z. □

Signature et déterminant

Exercice 12. Soit E un espace de dimension finie n et Q une forme quadratique sur E. On choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note A la matrice de Q dans cette base.

1. Le déterminant de A dépend-il de la base choisie ?
2. Montrer que son signe ne dépend pas de la base choisie.

Solution. Les deux questions se répondent à travers la remarque suivante. Soient $e'_1, \ldots, e'_n$ est une base de E, A' la matrice de Q dans cette base et P la matrice de passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ à la base $e'_1, \ldots, e'_n$, on a $A' = {}^tPAP$. En prenant le determinant de cette expression :

$$\det A' = \det({}^tPAP) = \det({}^tP) \det(A) \det(P) = \det(A) \det(P)^2,$$

où on a utilisé d'abord la multiplicativité du déterminant et ensuite l'invariant du déterminant par transposition de la matrice. Ceci démontre qu'on générale le détérminant dépend, mais pas son signe car, pour une matrice inversible P, on a $(\det P)^2 > 0$. □

Exercice 13. On se donne trois réels a, b, $c \in \mathbf{R}$ et on pose $\Delta = ac - \frac{b^2}{4}$. Considérons la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de Q en coordonnées.
2. Montrer que le signe de Δ ne dépend que de la signature de Q (*cf.* exercice précédent).
3. Montrer que la forme quadratique est non dégénérée si et seulement si Δ est non nul.
4. Calculer le signe de Δ pour chacune des valeurs possibles de la signature.
5. En déduire que Δ est strictement négatif si et seulement si la signature vaut $(1, 1)$.

Solution. (1) $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.

Les questions (2), (3) et (4) découlent de la discussion suivante. Par l'algorithme de Gauss, il existe une matrice inversible P telle que

$$ {}^tP \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. $$

On a donc

$$ \mathrm{signe}(\Delta) = \mathrm{signe}(\det(P)^2\Delta) = \mathrm{signe}(\lambda\mu) = \mathrm{signe}(\lambda)\mathrm{signe}(\mu). $$

Le signe du déterminant est donc le produit des signes de λ et μ. Si Q est dégénérée c'est 0. Si Q est de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$, Δ est > 0. Si Q est de signature $(1, 1)$, Δ est < 0. □

Exercice 14. Soit a, $b \in \mathbf{R}$. On considère la forme quadratique Q sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est donnée par

$$ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 3b \\ 2a & 3b & 2a^2 \end{pmatrix}. $$

Cette forme quadratique intervient dans l'étude des extensions cubiques en théorie de Galois.

1. Calculer le déterminant de cette matrice ; on le notera Δ.
2. Calculer $Q(1, 0, 0)$; Montrer que la signature de Q n'est pas égale à $(0, 3)$.
3. Montrer que si $\Delta < 0$, la signature vaut $(2, 1)$.
4. Calculer la matrice de Q en restriction à l'espace $\mathcal{E}$ engendré par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$.
5. En déduire que si $\Delta > 0$, Q est définie positive sur $\mathcal{E}$.
6. Montrer que si $\Delta > 0$, la signature de Q vaut $(3, 0)$.

Solution. (1) $\Delta = 4a^3 - 27b^2$.

(2) $Q(e_1) = 3 > 0$. Comme e_1 est non nul, Q ne peut pas être définie négative.

(3) En effet, le déterminant est strictement négatif si et seulement si la signature est $(2, 1)$.

(4) C'est la matrice carrée en haut à gauche :

$$ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}. $$

(5) En effet $\Delta = 4a^3 - 27b^2 > 0$ si et seulement si $a > 0$.

(6) Soit (p, q) la signature de Q. D'après la question (5) on a $p \geq 2$. Les uniques possibilités sont $(2, 1)$ et $(3, 0)$, mais le cas $(2, 1)$ est exclu par la question (3). □