Espaces euclidiens

Espaces euclidiens

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$ composé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que l'expression suivante définit un produit scalaire sur cet espace :

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{3} P_1(k) P_2(k).$$

Soit $d \geq 1$ un entier. On se place sur l'espace $\mathbf{R}_d[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à d. Pour quelles valeurs de n l'expression suivante définit-elle un produit scalaire sur cet espace ?

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} P_1(k) P_2(k).$$

Solution. Pour $k \in \mathbf{N}$ soit $\mathrm{ev}_k \colon \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}$ l'application associant à un polynôme P le nombre réel $P(k)$: c'est une forme linéaire. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ev}_k(P_1) \mathrm{ev}_k(P_2),$$

définit une forme biliéaire symétrique sur $\mathbf{R}[X]$. De plus, pour $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0.$$

Donc la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

Soit $d \geq 1$ un entier. J'affirme qu'elle est définie positive sur $\mathbf{R}_d[X]$ si et seulement si $n \geq d$.

($\Rightarrow$) Par contraposition on suppose $d \geq n+1$. On considère le polynôme

$$P(X) = X(X-1)\cdots(X-n).$$

Le polynôme P a degré $n+1 \leq d$. D'autre part, $P(k) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$, donc $\langle P, P \rangle = 0$.

($\Leftarrow$) Soit P un polynôme de degré d non nul. Alors P a au plus d zéros dans $\mathbf{R}$. Comme $d \leq n+1$ il existe $k = 0, \ldots, n$ tel que $P(k) \neq 0$. Donc $\langle P, P \rangle \geq P(k)^2 > 0$. □

Exercice 2. On se place sur l'espace vectoriel $C^0([a,b], \mathbf{R})$ des fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que l'expression suivante définit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([a,b], \mathbf{R})$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) h(t)\, dt.$$

À quelle condition sur h cette expression définit-elle un produit scalaire sur $C^0([a,b], \mathbf{R})$?

Démonstration. J'affirme que la forme bilinéaire $\langle f, g \rangle$ est définie positive si et seulement si $h(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ et l'ensemble de ses zéros $Z = \{t \in [a,b] : h(t) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle ouvert.

Avant démontrer cette équivalence, on fixe la notation suivante : pour des réels $\alpha < \beta$ on considère la fonction

$$\phi_{\alpha\beta}(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \alpha, \\ t - \alpha & \text{si } \alpha < t \leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ -(t-\beta) & \text{si } \frac{\alpha+\beta}{2} < t \leq \beta, \\ 0 & \text{si } t > \beta. \end{cases}$$

On laisse au lecteur de vérifier que la fonction $\phi_{\alpha\beta}$ ainsi définie est continue. On passe à la démonstration de l'équivalence ci-dessus.

($\Rightarrow$) On suppose que la forme bilinéaire symétrique $\langle f, g\rangle$ est définie positive.

On montre d'abord que h est positive. Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $h(t_0) < 0$. Par continuité de h, il existe $a < \alpha < \beta < b$ tels que $h(t) < 0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Puisque $\phi_{\alpha\beta}$ s'annule en dehors de $[\alpha,\beta]$, on a

$$\langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}\rangle = \int_a^b \phi_{\alpha\beta}(t)^2 h(t)\ dt = \int_\alpha^\beta \phi_{\alpha\beta}(t)^2 h(t)\ dt.$$

(On utilisera cette remarque à plusieurs reprises dans la suite, sans y faire référence.) Comme h est strictement négative sur $[\alpha,\beta]$ et que l'intégrale d'une fonction strictement négative est strictement négatif, on a $\langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}\rangle < 0$, ce qui contredit la positivité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On montre que Z ne contient pas d'intervalle ouvert. Supposons, par l'absurde, que Z contient l'intervalle $]\alpha,\beta[$ avec $a < \alpha < \beta < b$. Par continuité de h, on a $h(t) = 0$ pour tout $t \in [\alpha,\beta]$. Alors

$$\langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}\rangle = \int_\alpha^\beta \phi_{\alpha\beta}(t)^2 h(t)\ dt = 0.$$

D'autre part, $\phi_{\alpha\beta}$ n'est pas la fonction identiquement nulle, donc $\langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}\rangle > 0$. Contradiction.

($\Leftarrow$) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue non identiquement nulle.

Il existe alors $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$ on peut supposer $f(t_0) > 0$. Par continuité, il existe $a < \alpha < \beta < b$ tels que $f(t) < 0$ pour tout $t \in [\alpha,\beta]$.

Par hypothèse, l'intervalle $]\alpha,\beta[$ n'est pas contenu dans Z. Puisque h est partout positive, il existe $\alpha < t_1 < \beta$ tel que $h(t_1) > 0$. Par continuité, il existe $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ tels que $h(t) < 0$ pour tout $t \in [\alpha', \beta']$. On a alors

$$\langle f, f\rangle = \int_a^{\alpha'} f(t)^2 h(t)\ dt + \int_{\alpha'}^{\beta'} f(t)^2 h(t)\ dt + \int_{\beta'}^b f(t)^2 h(t)\ dt.$$

On considère le membre de droite de cette égalité. Comme h est positive, le premier et le troisième intégrale sont positifs. Comme f et h sont strictement positive sur $[\alpha', \beta']$, le deuxième intégrale est strictement positif. En particulier, $\langle f, f\rangle > 0$. $\square$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La forme quadratique associée est notée $\|\cdot\|^2$. Développer l'expression

$$\Big\| x\|y\| - \|x\|y \Big\|^2.$$

En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration. Soit $v = x\|y\| - \|x\|y$. On a

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \langle x\|y\| - \|x\|y, x\|y\| - \|x\|y\rangle \\ &= \|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\langle x, y\rangle + \|x\|^2\|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|\|y\|\langle x, y\rangle).\end{aligned}$$

Supposons x, y linéairement indépendants. Alors v est non nul et $\|v\| > 0$. On obtient ainsi

$$\langle x, y\rangle < \|x\|\|y\|.$$

Supposons $\langle x, y\rangle \leq 0$. En appliquant l'inégalité précédente à $-x$ et y, on obtient

$$|\langle x, y\rangle| = -\langle x, y\rangle < \|-x\|\|y\| = \|x\|\|y\|.$$

Supposons x et y linéairement dépendants. Si x ou y est nul, alors on a $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| = 0$. Supposons x et y non nuls. Quitte à changer le signe de x, on peut supposer $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$. Alors

$$v = x\|y\| - \|x\|y = x\|\lambda x\| - \|x\|\lambda x = 0,$$

car $|\lambda| = \lambda$. En particulier, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$. □

Exercice 4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire standard, montrer

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Solution. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$. On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = (\lambda, \dots, \lambda)$. □

Exercice 5. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \dots, x_5 \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Démonstration. Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_5)$ et $w = (1, 2, 3, 4, 5)$. En effet, on a $\|w\| = \sqrt{55}$. En particulier, on a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda w$. □

Exercice 6.

1. Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 5z)^2 \leq 30$; dans quel cas a-t-on $(x + 2y + 5z)^2 = 30$?
2. Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$; dans quel cas a-t-on $(x + y + z)^2 = \frac{17}{10}$?

Solution. On muni $\mathbf{R}^3$ du produit scalaire standard.

(1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $v = (x, y, z)$ et $w = (1, 2, 5)$ on a

$$(x + 2y + 5z)^2 = \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2 = 30(x^2 + y^2 + z^2) \leq 30,$$

car par hypothèse $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. On a égalité si et seulement $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda w$. En combinant ces deux conditions on trouve $\lambda^2 = \frac{1}{30}$, donc

$$v = \pm \tfrac{1}{\sqrt{30}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right).$$

(2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $v = (x, \sqrt{2}y, \sqrt{5}y)$ et $w = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ on trouve

$$(x + y + z)^2 = \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 = \tfrac{17}{10}(x^2 + 2y^2 + 5z^2) \leq \tfrac{17}{10},$$

car par hypothèse $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. □

Exercice 7. Soient $a < b$ dans $\mathbf{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Pour tout $f \in E$, montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)|\ dt\right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2\ dt.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? Indication : remarquer que $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

Solution. On muni l'espace vectoriel E du produit scalaire $\langle \phi, \psi\rangle = \int_a^b \phi(t)\psi(t)\ dt$. On pose, pour $t \in [a, b]$, $g(t) := |f(t)|$ et $h(t) = 1$. Les fonctions g et h sont continues, donc elle appartiennent à E. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b |f(t)|\ dt\right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2\ dt,$$

où on a utilisé l'indication $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $g = \lambda h$, c'est-à-dire, si et seulement si g constante. La valeur absolue d'une fonction *continue* est constante si et seulement si la fonction est constante. On a donc égalité si et seulement si f est constante. □

Exercice 8. Soit P un polynôme défini sur $\mathbf{R}$. Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t)\ dt\right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2\ dt.$$

Peut-on avoir l'égalité ?

Solution. On muni l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[t]$ du produit scalaire $\langle F, G\rangle = \int_{-1}^1 F(t)G(t)\ dt$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux polynômes $P(t)$ et $Q(t) := t$, on obtient

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t)\ dt\right)^2 \leq \left(\int_{-1}^1 t^2\ dt\right)\left(\int_{-1}^1 P(t)^2\ dt\right) = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2\ dt,$$

car

$$\int_{-1}^1 t^2\ dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=1} - \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=-1} = \frac{2}{3}.$$

On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $P(t) = \lambda t$. □

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et $x, y, z \in E$. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à trois variables :

$$\|x\|^2\langle y,z\rangle^2 + \|y\|^2\langle x,z\rangle^2 + \|z\|^2\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle\langle z,x\rangle.$$

On pourra commencer par le cas où x, y, z sont linéairement indépendants et s'intéresser au déterminant de la matrice du produit scalaire dans la base (x, y, z).

Solution. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle & \langle z,z\rangle \end{pmatrix}.$$

En calculant son déterminant on trouve

$$\det A = \|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle\langle z,x\rangle - (\|x\|^2\langle y,z\rangle^2 + \|y\|^2\langle x,z\rangle^2 + \|z\|^2\langle x,y\rangle^2).$$

L'inégalité de l'énoncé revient à $\det A \geq 0$. On montre un résultat plus précis : le déterminant de A est positif et il est nul si et seulement si x, y et z sont linéairement dépendants.

Supposons d'abord x, y et z linéairement indépendants. Alors A est la matrice du produit scalaire dans la base (x, y, z). La restriction du produit scalaire a l'espace vectoriel engendré par x, y, z est une forme quadratique définie positive, de signature $(3, 0)$. D'après l'exercice 12 de la feuille 2, le déterminant de A est strictement positif.

Supposons x, y et z linéairement dépendants. Quitte à permuter x, y et z on peut supposer $z = \alpha x + \beta y$ pour des nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. On a alors

$$A = \begin{pmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle & \alpha\langle x,x\rangle + \beta\langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle & \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle y,y\rangle \\ \alpha\langle x,x\rangle + \beta\langle x,y\rangle & \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle y,y\rangle & \alpha^2\langle x,x\rangle + 2\alpha\beta\langle x,y\rangle + \beta^2\langle y,y\rangle \end{pmatrix}.$$

La relation $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ montre que A a rang ≤ 2. En particulier $\det A = 0$. □

Exercice 10. Soit E un espace euclidien et φ une forme bilinéaire symétrique positive. Montrer que son cône des vecteurs isotropes coïncide avec son noyau.

Démonstration. Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique est contenu dans son cône isotrope. Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit v un vecteur dans le cône isotrope de ϕ. Pour montrer qu'il est dans le noyau, il s'agit de montrer que pour tout $w \in E$ on a $\phi(v, w)$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme ϕ est positive,

$$0 \leq \phi(v + \lambda w, v + \lambda w) = \phi(v, v) + 2\lambda\phi(v, w) + \lambda^2\phi(w, w) = 2\lambda\phi(v, w) + \lambda^2\phi(w, w)).$$

Supposons $\phi(w, w) = 0$. Pour que $\lambda\phi(v, w)$ soit positif pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on doit forcément avoir $\phi(v, w) = 0$. Supposons $\phi(w, w) > 0$. Dans ce cas, pour que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $2\lambda\phi(v, w) + \lambda^2\phi(w, w))$ soit négatif :

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = \phi(v, w)^2 - \phi(w, w) \cdot 0 = \phi(v, w)^2.$$

Pour que $\phi(v, w)^2$ soit négatif, on doit avoir $\phi(v, w) = 0$. □

Exercice 11. Soit V le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norme euclidienne associée. Soit $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, soit $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi pt)$. On admet que :

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbf{N}, \qquad \langle e_p, e_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q, n \in \mathbf{N}$, on pose $c_q(f) = \langle e_q, f\rangle$ puis $S_n(f) = \sum_{q=0}^n c_q(f)e_q$ et $R_n(f) = f - S_n(f)$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que $\langle e_p, R_n(f)\rangle = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.
2. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

3. En utilisant l'égalité $\cos(\theta)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\big)$, démontrer la formule $(*)$.

Solution. (1) Par bilinéarité on a

$$\langle e_p, R_n(f)\rangle = \langle e_p, f - S_n(f)\rangle = \langle e_p, f\rangle - \sum_{q=0}^{n} c_q(f)\langle e_p, e_q\rangle.$$

Par $(*)$, on a $\langle e_p, e_p\rangle = 1$ et $\langle e_p, e_q\rangle = 0$ si $p \neq q$. En continuant le calcul précédent, on obtient

$$\langle e_p, R_n(f)\rangle = \langle e_p, f\rangle - c_p(f) = 0$$

par définition de $c_p(f)$.

(2) D'après (1), $S_n(f)$ et $R_n(f)$ sont orthogonaux. Par le théorème de Pythagore,

$$\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|R_n(f)\|^2 \geq \|S_n(f)\|^2.$$

La relation $(*)$ dit que les fonctions e_p sont deux à deux orthogonales. À nouveau par le théorème de Pythagore on obtient

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{q=0}^{n} c_q(f)^2 \|e_p\|^2$$

et on conclut car $\|e_p\| = 1$ d'après $(*)$.

(3) Soient $p, q \in \mathbf{N}$. En utilisant la formule de somme des cosinus citée dans l'énoncé, on a

$$\langle e_p, e_q\rangle = 2\int_0^1 \cos(2\pi pt)\cos(2\pi qt)\ dt = \int_0^1 \cos(2\pi(p+q)t) + \cos(2\pi(p-q)t)\ dt.$$

Pour un entier $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a

$$\int_0^1 \cos(2\pi kt)\ dt = \left.\frac{\sin(2\pi kt)}{2\pi k}\right|_{t=1} - \left.\frac{\sin(2\pi kt)}{2\pi k}\right|_{t=0} = 0.$$

Pour des entiers positifs $p \neq q$ on a que $p - q$ et $p + q$ sont des entiers non nuls. Donc $\langle e_p, e_q \rangle = 0$. Si $p \geq 1$, alors $p + p$ est non nul et on a

$$\langle e_p, e_p \rangle = \int_0^1 dt = 1.$$

On termine en remarquant $\langle e_0, e_0 \rangle = \int_0^1 dt = 1$. □