Géométrie euclidienne

Exercice 1. Soit x, y deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer la formule $\|x\|^2\|y\|^2 = \mathrm{Aire}(x,y)^2 + \langle x, y\rangle^2$ où $\mathrm{Aire}(x,y)$ est l'aire du parallélogramme de côtés x, y. On pourra faire un calcul en coordonnées.
2. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(1,1,1)$ et $(1,-1,0)$. Calculer l'aire du parallélogramme dont les côtés sont donnés par ces deux vecteurs.

Démonstration. (1) L'aire du parallélogramme de côtés x, y est $\mathrm{Aire}(x,y) = \|x\|\|\operatorname{pr}_{\mathrm{Vect}(x)^\perp}(y)\|$, où $\operatorname{pr}_{\mathrm{Vect}(x)^\perp}(y)$ est la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace vectoriel engedré par x (à savoir, la hauteur du parallélogramme). Par définition,

$$\operatorname{pr}_{\mathrm{Vect}(x)^\perp}(y) = y - \operatorname{pr}_{\mathrm{Vect}(x)}(y) = y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}x.$$

En particulier,

$$\|\operatorname{pr}_{\mathrm{Vect}(x)^\perp}(y)\|^2 = \|y\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} = \|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle}.$$

En multipliant par $\|x\|^2$ on obtient

$$\mathrm{Aire}(x,y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2.$$

(2) Les deux vecteurs sont orthogonaux (*i.e*, il s'agit d'un rectangle), donc l'aire du parallélogramme est $\sqrt{6}$. ☐

Exercice 2. Soit un cube de sommets

$$A = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les droites (AC) et (FH) sont orthogonales.
2. Soient I, J, K, L les milieux respectifs de $[A,C]$, $[F,H]$, $[H,C]$, $[A,F]$. Montrer que I, J, K, L forment un parallélogramme.
3. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont orthogonales.

Exercice 3. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$. On considère l'hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

1. Trouver un vecteur v de norme 1 orthogonal à cet hyperplan.
2. Donner une expression pour la projection orthogonale de $x \in \mathbf{R}^n$ sur la droite dirigée par v.
3. En déduire une expression pour la distance $d(x, H)$ de x à H.
4. Calculer la distance du vecteur $x = (1,2,3) \in \mathbf{R}^3$ au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Démonstration. (1) Par définition, l'hyperplan H est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$. Donc $v = \frac{a}{\|a\|}$ convient.

(2) Puisque v est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)$, on a

$$\mathrm{pr}_{H^\perp}(x) = \langle x, v\rangle v = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a.$$

(3) La distance $d(x, H)$ est par définition la norme de $\mathrm{pr}_{H^\perp}(x)$. Donc,

$$\|\,\mathrm{pr}_{H^\perp}(x)\| = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}.$$

(4) D'après la formule précédente on a $d(x, H) = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. □

Exercice 4. On considère le sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ donné par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Donner une base orthonormée de H ainsi que la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H. Calculer la distance des vecteurs suivants à H.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. L'espace vectoriel H est donné par les équations $x_1 = -x_2 - x_3$ et $x_4 = -x_2 - x_3$. Une base de l'espace vectoriel H est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs w_1, w_2 sont orthogonaux. Donc $w_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1$, $w_2' = \frac{1}{\sqrt{10}} w_2$ est une base orthonormée de H. Par la formule du cours, la projection orthogonale sur H est donnée par

$$p(x) = \langle x, w_1'\rangle w_1' + \langle x, w_2'\rangle w_2' = \frac{\langle x, w_1\rangle}{2} w_1 + \frac{\langle x, w_2\rangle}{10} w_2.$$

En prenant $x = e_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$ on trouve la matrice de p :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La distance $d(x, H)$ de x à H est la norme de la projection sur $H^\perp$ de x, qui est $x - p(x)$. Pour $x = 5e_2$ on trouve

$$5e_2 - 5p(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $d(v_1, H) = \sqrt{10}$. Le vecteur v_2 appartient à H, donc sa distance est nulle. Pour v_3 on a

$$v_3 - p(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $d(v_3, H) = \sqrt{2}$. □

Exercice 5. On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}^3$ donné par l'équation cartésienne

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Quelle est sa dimension ? Construire une base orthonormée de E.

Démonstration. Il s'agit d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ donc de dimension 2. Une base de cet espace vectoriel est

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En calcule la projection de v_2 sur l'orthogonal de v_1 :

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En normalisant, on trouve qu'une base orthonormée est

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cela termine l'exercice. □

Exercice 6. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Démonstration. (1) On applique le procédé de Gram-Schmidt. Pour le premier vecteur, il suffit de le normaliser : $v_1' = \frac{1}{3} v_1$. On calcule la projection orthogonale $\tilde{v}_2$ sur l'orthogonal de v_1 :

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \langle v_2, v_1' \rangle v_1' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\tilde{v}_2$ est de norme 1, donc on pose $v_2' = \tilde{v}_2$. On calcule la projection orthogonale $\tilde{v}_3$ de v_3 sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)^{\perp}$:

$$\tilde{v}_3 = v_3 - \langle v_3, v_2' \rangle v_2' - \langle v_3, v_1' \rangle v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On termine en normalisant $\tilde{v}_3$: $v_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{v}_3$.

(2) L'intervalle $[0,1]$ étant de longueur 1, la fonction P est de norme 1. Puisque $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, la projection orthogonale de Q sur l'orthogonale de p est :

$$\tilde{Q} = Q - \langle Q, P\rangle P = X - \tfrac{1}{2}.$$

Comme $\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12}$, le polynôme $Q' = 2\sqrt{3}(X-\frac{1}{2})$ est de norme 1. Afin de calculer la projection orthogonale $\tilde{R}$ de R sur $\mathrm{Vect}(P,Q)^\perp$, on remarque les identités

$$\int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{2}, \qquad\qquad \int_0^1 x^2(x-\tfrac{1}{2})dx = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}.$$

Ceci étant acquis, on trouve :

$$\tilde{R} = R - \langle R, Q'\rangle Q' - \langle R, P\rangle P = X^2 - \tfrac{1}{12}(X - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}.$$

Le carré de la norme de $\tilde{R}$ est $\|R\|^2 - \langle R, Q'\rangle^2 - \langle R, P\rangle^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = \frac{1}{180}$. En particulier, le polynôme $R' = 6\sqrt{5}R'$ est de norme 1. ☐

Exercice 7. Soit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et calculer A^2. En déduire les caractéristiques géométriques de A.

Démonstration. On vérifie aussitôt les égalités ${}^tAA = \mathrm{id}$ et $\det A = 1$. Il s'agit donc d'une rotation d'angle θ. On trouve θ. La matrice A^2 est la matrice d'une rotation d'angle 2θ et on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La matrice A^2 est donc la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. En particulier, $\theta = \frac{\pi}{8}$. ☐

Exercice 8. Soient $(p,q) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$ et soit

$$B = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2-p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

Montrer que $B \in O_2(\mathbf{R})$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Démonstration. La matrice B est orthogonale, *i.e.* elle vérfiie ${}^tBB = \mathrm{id}$, et de déterminant -1. Il s'agit donc d'une symétrie orthogonale d'axe

$$\ker(B - \mathrm{id}) = \ker\begin{pmatrix} -q^2 & pq \\ pq & -p^2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Ceci termine l'exercice. ☐

Exercice 9. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, P le plan d'équation $x+y+z=0$ et s la symétrie orthogonale par rapport à P.

Citer une formule du cours exprimant $s(x)$ en fonction de x et de n, où n est un vecteur $\neq 0$ orthogonal à P, puis en appliquant cette formule à e_1, e_2, e_3, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s)$.

Démonstration. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors l'hyperplan

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

s'identifie à l'orthogonale de $\mathrm{Vect}(a)$. Le vecteur $u = \frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de $H^\perp$. Par conséquent,

$$\mathrm{pr}_H(x) = x - \mathrm{pr}_{H^\perp}(x) = x - \langle x, u\rangle u = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2}a.$$

Soit $x = e_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On a

$$\mathrm{pr}_H(e_i) = e_i - \frac{a_i}{\|a\|^2}a.$$

La matrice de la projection sur H est donc

$$A = \frac{1}{\|a\|^2}\begin{pmatrix} \|a\|^2 - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_1a_2 & \|a\|^2 - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1a_n & -a_2a_n & \cdots & \|a\|^2 - a_n^2 \end{pmatrix}.$$

On laisse au lecteur d'appliquer ces formules avec $n = 3$ et $a = (1, 1, 1)$. $\square$

Exercice 10. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Donner les matrices dans la base canonique des transformations suivantes :

1. la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine,
2. la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'origine,
3. la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)$,
4. la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1, -1)$.

Démonstration. Une rotation d'angle θ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Une symétrie orthogonale a pour matrice

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

avec $a^2 + b^2 = 1$. Avec ces notations, l'axe de symétrie est

$$\ker(S - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}.$$

Pour (3) il suffit d'appliquer la formule avec $a = 0$ et $b = 1$. Pour (4) il suffit de remarquer que la symétrie en question est l'opposé de la symétrie au point (3), car c'est la symétrie orthogonale d'axe symétrie orthogonale à celui du point (3). $\square$

Exercice 11. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Donner l'image des vecteurs de coordonnées $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ et $(1,2)$ par la réflexion orthogonale relativement à la droite dirigée par le vecteur $(1,1)$.

Démonstration. Dans l'exercice précédent on a trouvé que la symétrie orthogonale en question a matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Les vecteurs dans l'énoncé ont respectivement image $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$ et $(2,1)$. □

Exercice 12. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. À quoi est égale la composée de la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1,0)$ et de la réflexion orthogonale d'axe dirigé par le vecteur $(1,0)$?

Démonstration. Il s'agit de composer deux fois la même symétrie, donc la composée est l'identité. □

Exercice 13. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Écrire la rotation d'angle $\pi/3$ comme la composée de deux réflexions orthogonales.

Démonstration. On a
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega & \cos\theta\sin\omega - \sin\theta\cos\omega \\ \sin\theta\cos\omega - \cos\theta\sin\omega & \cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\omega) & -\sin(\theta-\omega) \\ \sin(\theta-\omega) & \cos(\theta-\omega) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
En particulier, la rotation d'angle θ est la composée des symétrie de matrice
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$
On laisse au lecteur d'appliquer les formules pour $\theta = \frac{\pi}{3}$. □

Exercice 14. Décrire géométriquement les transformations du plan suivantes.
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (1) Symétrie centrale, *i.e.* une rotation d'angle π. (2) Symétrie d'axe $\mathrm{Vect}(e_2)$. (3) Symétrie d'axe $e_1 + e_2$. (4) Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. (5) Rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. (6) Projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$. (7) Symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}((\sqrt{2}+1)e_1 + e_2)$. (8) Rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$. □