Déterminants

Exercice 1. Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (1) $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$. (2) 96. (3) Puisque la première ligne est multiple de a, le déterminant en question est égal à

$$a \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

En faisant les opérations sur les colonnes $C_i - C_1 \to C_i$ pour $i = 2, 3, 4$, et en développant par rapport à la première ligne on trouve qu'il est égale à

$$a \det \begin{pmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{pmatrix}.$$

Puisque la première ligne est multiple de $b - a$, le déterminant est égale à

$$a(b-a) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{pmatrix}.$$

En faisant les opérations sur les colonnes $C_i - C_1 \to C_i$ pour $i = 2, 3$, et en développant par rapport à la première ligne on trouve qu'il est égale à

$$a(b-a) \det \begin{pmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{pmatrix}.$$

Puisque la première ligne est multiple de $c - b$, le déterminant est égale à

$$a(b-a)(c-b) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c-b & d-b \end{pmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

(4) -12. $\square$

Exercice 2. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$1)\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix}1&0\\3456&1\end{pmatrix},$$

$$4)\begin{pmatrix}4&3&3&4&7\\9&1&5&9&5\\5&4&6&5&4\\3&9&9&3&5\\3&7&2&3&6\end{pmatrix},\quad 5)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&6&8&10\\6&12&5&0&2\\1&14&11&3&18\\1&2&6&1&11\end{pmatrix},\quad 6)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&0&1&2&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&1\\1&2&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$7)\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&0\\1&0&1&0&0&0\end{pmatrix},\quad 8)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&8&3&7&2\\0&0&2&8&-1&1\\0&0&0&1&8&5\\0&0&0&0&-1&9\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix},\quad 9)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&0&0&0&0&5\\3&0&0&0&0&4\\4&0&0&0&0&3\\5&0&0&0&0&2\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Démonstration. (1) Le déterminant est nul car la matrice est de rang 1.

(2) Le déterminant est nul car la matrice est de rang 1.

(3) Le déterminant est 1 car, étant une matrice triangulaire inférieure, le déterminant est le produit des éléments diagonaux.

(4) Le déterminant est nul car la première et quatrième colonne sont égales.

(5) Le déterminant est nul car la deuxième ligne est le double de la première.

(6) En soustrayant la quatrième ligne à la troisième, et en développant ensuite par rapport à la troisième, on trouve que le déterminant est égale à

$$-\det\begin{pmatrix}1&2&3&5\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}.$$

En faisant l'opération élementaire $L_4 - L_2 - L_3 \to L_4$, et développant par rapport à la quatrième ligne on trouve que le déterminant est égale à

$$\det\begin{pmatrix}1&3&5\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la troisième ligne, on conclut que le déterminant est égale à -2.

(7) Le déterminant est nul car la deuxième ligne est nulle.

(8) Le déterminant est -24 car, étant une matrice triangulaire supérieure, le déterminant est le produit des éléments diagonaux.

(9) Le déterminant est nul car la deuxième ligne car l'espace vectoriel engendré par la deuxième, troisième, quatrième, cinquième colonne est de dimension 2. □

Exercice 3. Soient A, B, C trois points distincts du plan affine euclidien orienté (disons $\mathbf{R}^2$). Montrer que

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}).$$

En déduire la formule de trigonométrie classique

$$\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})}{AB}.$$

Démonstration. Soient $v = \overrightarrow{AB}$ et $w = \overrightarrow{BC}$. Alors $\overrightarrow{AC} = v + w$. On a

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \det(w, -v - w) = \det(v, w) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}),$$
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \det(v, w) = \det(v, v + w) = \det(-v - w, v) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

Par définition, le sinus de l'angle θ entre deux vecteurs t, t' dans l'espace euclidien orienté $\mathbf{R}^2$ est definie par

$$\sin\theta = \frac{\det(t, t')}{\|t\|\|t'\|}.$$

La formule trigonométrique en question suit alors de cette définition et des égalités précédentes. □

Exercice 4. Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. Parmi les matrices de la forme $A_\lambda = A + \lambda\,\mathrm{id}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, quelles sont celles qui sont inversibles ? Montrer qu'il existe une suite (λ_k) tendant vers zéro telle que toutes les matrices A_{λ_k} sont inversibles et la suite A_{λ_k} converge vers A, au sens où les coefficients des A_{λ_k} convergent vers ceux de A.

Démonstration. Par définition, la matrice A_λ est inversible si et seulement si λ n'est pas une valeur propre.

Puisque il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe un entier K tel que, pour tout entier $k \geq K$, le réel $\frac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre. La suite $\{A_{\frac{1}{k}}\}_{k \geq K}$ est une suite de matrices inversibles et elle converge vers $A_0 = A$. □

Espaces supplémentaires

Exercice 5. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = y = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, y = 2z \text{ et } x = 0\}.$$

1. A-t-on $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$?
2. F_1 et F_2 sont-ils en somme directe ?

Démonstration. L'intersection de F_1 et F_2 est donné par les équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = 2z$. Ceci implique $z = 0$ et l'intersection est donc nulle. En particulier, les deux questions ont réponse positive. □

Exercice 6. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y = 0 \text{ et } 3y - z = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z = 0\}.$$

Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Démonstration. Puisque F_1 et F_2 ont respectivement dimension 1 et 2, il suffit de vérifier que F_1 et F_2 ont intersection nulle. Des équations $x + y = 0$, $3y - z = 0$ et $z = 0$ ont déduit aussitôt $y = 0$ et $x = 0$. Donc $F_1 \cap F_2 = 0$ et ils sont supplémentaires. □

Exercice 7. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y = 0\}.$$

1. Calculer $F_1 \cap F_2$, en déduire la dimension de $F_1 + F_2$.
2. A-t-on $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$? F_1 et F_2 sont-ils en somme directe ?
3. F_1 et F_2 sont-ils orthogonaux relativement au produit scalaire usuel ?

Démonstration. (1) Il s'agit de l'intersection de deux plans distincts dans $\mathbf{R}^3$, donc la dimension de l'intersection vaut 1.

(2) Non, car l'intersection est non nulle.

(3) Non, car l'intersection de deux sous-espaces orthogonaux est nulle. □

Exercice 8. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - 3y + z = 0\},$$
$$F_2 = \text{ Vect } ((1, 0, 1)).$$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbf{R}^3$.
2. Ces deux espaces sont-ils orthogonaux relativement au produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^3$?

Démonstration. (1) Puisque F_1 a dimension 2 et F_2 a dimension 1, il suffit de montrer que F_1 et F_2 ont intersection nulle. Pour ce faire, il suffit de remarquer que le vecteur $e_1 + e_3$ ne vérifie pas l'équation $2x - 3y + z = 0$ définissant F_1.

(2) Non. Par exemple, le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à F_1, mais son produit scalaire avec $e_1 + e_3$ vaut 2. □

Exercice 9. On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$. On considère $F_1 = \{f \in E, f \text{ est paire}\}$ et $F_2 = \{f \in E, f \text{ est impaire}\}$. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = E$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'intersection de F_1 et F_2 est nulle. En effet, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction à la fois paire et impaire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$f(x) = f(-x) = -f(x),$$

ce qui implique $f(x) = 0$. Comme le point x est arbitraire, la fonction f est identiquement nulle.

Montrons que toute fonction f s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Pour cela, il suffit de poser

$$i(f)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad p(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

La fonction $i(f)$ (resp. $p(f)$) est impaire (resp. paire) et on a $f = i(f) + p(f)$. □

Exercice 10. Soit Q une forme quadratique définie sur un espace vectoriel de dimension finie E. On note (p, q) sa signature. On considère deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 tels que la restriction de Q à E_1 est définie positive, la restriction de Q à E_2 est définie négative. Montrer que

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \ker(q).$$

Démonstration. Soit ϕ la forme polaire de Q. D'après le Lemme 3.6.1 du poly (p. 38) les intersections $E_1 \cap (E_2 + \ker(q))$ et $E_2 \cap (E_1 + \ker(q))$ sont nulles. Pour montrer que E_1, E_2 et $\ker(q)$ sont en somme directe, il ne reste qu'à montrer que l'intersection $(E_1 + E_2) \cap \ker(q)$ est nulle. Soit v un vecteur dans cette intersection. On l'écrit $v = v_1 + v_2$ avec $v_i \in E_i$ pour $i = 1, 2$. En écrivant $v_1 = v - v_2$, on trouver que v_1 appartient à l'intersection $E_1 \cap (E_2 + \ker(q))$, et il est donc nul. De manière similaire on trouve que v_2, ce qui permet de conclure. □

Réduction des applications linéaires

Exercice 11. Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A (pour calculer $P_A(X)$, on pourra faire des opérations sur les colonnes pour faire apparaître au moins un zéro), puis une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3. Donner la signature de la forme quadratique $Q(x,y,z) = -7x^2+8xy-8xz+5y^2-4yz+5z^2$.

Démonstration. (1) La matrice est diagonalisable parce qu'elle est symétrique.

(2) En utilisant l'identité $P_{3A}(x) = 3^3 P_A(\frac{x}{3})$ on se ramène à calculer le polynôme caractéristique de la matrice $3A$. On a

$$\begin{aligned} P_{3A}(x) &= \det\begin{pmatrix} x+7 & -4 & 4 \\ -4 & x-5 & 2 \\ 4 & 2 & x-5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+7 & -4 & 4 \\ 0 & x-3 & x-3 \\ 4 & 2 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-3)\det\begin{pmatrix} x+7 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-3)\det\begin{pmatrix} x+7 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & x-7 \end{pmatrix} = (x-3)\det\begin{pmatrix} x+7 & 8 \\ 4 & x-7 \end{pmatrix} \\ &= (x-3)(x^2-81) = (x-3)(x-9)(x+9). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $3A$ sont donc 3, 9 et -9. Il en découle que les valeurs propres de la matrice A sont 1, 3, -3.

On calcule l'espace propre de la valeur propre 1. Comme $\ker(A - \mathrm{id}) = \ker(3A - 3\,\mathrm{id})$, on calcule le noyau de la matrice $3A - 3\,\mathrm{id}$:

$$3A - 3\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

La deuxième et sont de signe opposé. Comme la matrice $3A - 3\,\mathrm{id}$ est de rang 2 on trouve que son noyau est engendré par le vecteur $v_1 = e_2 + e_3$.

On calcule l'espace propre de la valeur propre 3. Comme $\ker(A - 3\,\mathrm{id}) = \ker(3A - 9\,\mathrm{id})$, on calcule le noyau de la matrice $3A - 9\,\mathrm{id}$:

$$3A - 9\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque l'identité $C_1 + 2C_2 - 2C_3 = 0$ entre colonnes. Comme la matrice $3A - 9\,\mathrm{id}$ est de rang 2 on trouve que son noyau est engendré par le vecteur $v_3 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$.

On calcule l'espace propre de la valeur propre -3. Comme $\ker(A + 3\,\mathrm{id}) = \ker(3A + 9\,\mathrm{id})$, on calcule le noyau de la matrice $3A + 9\,\mathrm{id}$:

$$3A + 9\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -4 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

On remarque l'identité $4C_1 - C_2 + C_3 = 0$ entre colonnes. Comme la matrice $3A + 9\,\mathrm{id}$ est de rang 2 on trouve que son noyau est engendré par le vecteur $v_{-3} = 4e_1 - e_2 + e_3$.

En conclusion, une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_1$, $\frac{1}{3}v_3$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}v_{-3}$.

(3) Comme il y a deux valeurs propres positifs et un négatif, la signature est $(2,1)$. □

Exercice 12. Diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. A) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-2 & 4 & -2 \\ 4 & x-2 & -2 \\ -2 & -2 & x-5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-6 & 6-x & 0 \\ 4 & x-2 & -2 \\ -2 & -2 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-6)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & x-2 & -2 \\ -2 & -2 & x-5 \end{pmatrix} = (x-6)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & x+2 & -2 \\ -2 & -4 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-6)\det \begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ -4 & x-5 \end{pmatrix} = (x-6)(x^2-3x-18) = (x+3)(x-6)^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -3 et 6.

On calcule l'espace propre de la valeur propre -3.

$$\begin{aligned} A + 3\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\frac{L_1-L_2}{9}\to L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{L_3-2L_1}{4}\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque l'identité $2C_1 + 2C_2 = C_3$ entre colonnes. Comme la matrice $A + 3\,\mathrm{id}$ a rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $v_3 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$.

Comme les espaces propres d'une application auto-adjointe sont deux à deux orthogonaux, on sait sans besoin de calcul que l'espace propre pour la valeur propre 6 est l'orthogonal du vecteur v_3. (On invite le lecteur à calculer le noyau de $A - 6\,\mathrm{id}$ et de se rendre compte de ce fait.) Une base de l'espace propre de la valeur propre 6 est donc $v_6 = e_1 - e_2$ et $w_6 = e_2 + 2e_3$. Ceci faisant, les vecteurs v_6 et w_6 ne sont pas orthogonaux. On applique la méthode de Gram-Schmidt :

$$\tilde{w}_6 = w_6 - \frac{\langle w_6, v_6\rangle}{\langle v_6, v_6\rangle} v_6 = w_6 + \tfrac{1}{2}v_6 = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + 4e_3).$$

En conclusion, une base orthonormée de vecteurs propres pour A est $\frac{1}{2}v_3$, $\frac{1}{\sqrt{2}}v_6$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tilde{w}_6$.

B) On calcule le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned}
P_B(x) &= \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & x+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & \sqrt{2}(x-1) & 1 \\ 0 & x-1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & x+1 \end{pmatrix} \\
&= (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & x+1 \end{pmatrix} \\
&= (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont 1, 2 et -2.

On calcule l'espace propre de la valeur propre 1 :

$$B - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice $B - \mathrm{id}$ est de rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $v_1 = \sqrt{2}e_1 + e_2$.

On calcule l'espace propre de la valeur propre 2 :

$$B - 2\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice $B - 2\,\mathrm{id}$ ayant rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $v_2 = -e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3$.

Comme les espaces propre sont deux à deux orthogonaux, un vecteur propre pour -2 est le produit vectoriel de v_1 et v_2. On procède de manière plus standard, en calculant l'espace propre pour -2 :

$$B + 2\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $B + 2\,\mathrm{id}$ ayant rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $v_{-2} = e_1 - \sqrt{2}e_2 + 3e_3$.

En conclusion, une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{3}}v_1$, $\frac{1}{2}v_2$ et $\frac{1}{2\sqrt{3}}v_{-2}$. □

Exercice 13. On considère les coniques du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ données par les équations

$$\begin{aligned}
C_1 &: 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 10x - 1 = 0, \\
C_2 &: 3x^2 - 4xy + 2y - 1 = 0, \\
C_3 &: x^2 + 4xy + 4y^2 + x - 4 = 0.
\end{aligned}$$

Déterminer la nature géométrique de ces coniques et calculer leur excentricité.

Démonstration. (1) On calcule les valeurs propres de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A_1 est $P_1(t) = t^2 - 7t + 6 = (t-1)(t-6)$. Il s'agit d'une ellipse d'excentricité $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(2) On calcule les valeurs propres de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A_1 est $P_1(t) = t^2+3t-4 = (t-1)(t+4)$. Il s'agit d'une hyperbole d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) On calcule les valeurs propres de la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A_1 est $P_1(t) = t^2 + 5t = t(t+5)$. Il s'agit d'une parabole, donc d'excentricité 1. □

Exercice 14. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$Q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz.$$

1. Donner la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner une base à la fois orthonormée pour le produit scalaire usuel et orthogonale pour Q.
3. Donner la signature et le rang de Q.
4. Calculer le noyau de Q. Est-il égal à son cône des vecteurs isotropes ?
5. On considère la quadrique $\mathcal{Q}_1$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{Q}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz = 1\}.$$

   Quelle est la nature de cette quadrique ? La dessiner.
6. On considère la quadrique $\mathcal{Q}_2$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{Q}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - z = 0\}.$$

   Quelle est la nature de cette quadrique ? La dessiner.

Démonstration. (1) La forme quadratique A a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il s'agit de l'exemple à p. 88 du poly. La matrice A a valeurs propres 1, -1 et 5. Les vecteurs

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sont des vecteurs propres respectivement pour les valeurs propre 1, -1 et 5, et forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. D'après le cours (*cf.* 3.4, Réduction simultanée), la base v_1, v_{-1} et v_5 est orthogonale pour Q.

(3) On a deux valeurs propres positives et une négative, donc la forme quadratique Q est de signature $(2,1)$ et rang 3.

(4) Le noyau est nul car Q est non-dégénérée. Par contre, le cône isotrope n'est pas l'ensemble $\{0\}$ car la forme quadratique Q n'est pas définie (*e.g.* le vecteur v_1+v_{-1} est dans le cône isotrope).

(5) La quadrique $\mathcal{Q}_1$ est d'équation $Q(x,y,z)=1$. Puisque

$$Q(Xv_1+Yv_{-1}+Zv_5)=X^2-Y^2+5Z^2,$$

la quadrique $\mathcal{Q}_1$ a équation $X^2-Y^2+5Z^2=1$ dans les coordonnées X, Y, Z. Il s'agit donc d'un hyperboloïde à une nappe.

(6) La quadrique $\mathcal{Q}_2$ est d'équation $Q(x,y,z)=z$. Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base v_1,v_{-1},v_5, alors les coordonnées X,Y,Z ci-dessus satisfont

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}.$$

Alors la quadrique $\mathcal{Q}_2$ a équation

$$\begin{aligned} 0 &= X^2-Y^2+5Z^2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}X-\tfrac{1}{\sqrt{3}}Y-\tfrac{1}{\sqrt{6}}Z\\ &= \left(X+\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\left(Y+\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+5\left(Z+\tfrac{1}{10\sqrt{6}}\right)^2-\tfrac{1}{20}. \end{aligned}$$

Il s'agit encore d'un hyperboloïde à une nappe. □

Exercice 15 (très classique)**.** Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ $(n\geq 2)$ la matrice symétrique dont tous les coefficients sont 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A puis en déduire la signature et le rang de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i<j}2x_ix_j$.
2. Plus généralement, déterminer en fonction de $a\in\mathbb{R}$ la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $Q_a(x_1,\ldots,x_n)=a(\sum_{i=1}^n x_i^2)+\sum_{i<j}2x_ix_j$.

Démonstration. (1) On remarque que la matrice $A+\mathrm{id}$ a rang 1. Donc $\ker(A+\mathrm{id})$ a dimension $n-1$. Comme la trace est la somme des valeurs propres, la dernière valeur propre est $n-1$. (On peut aussi voir que le vecteur $(1,\ldots,1)$ appartient au noyau de $A-(n-1)\,\mathrm{id}$). En particulier la signature de Q est $(1,n-1)$.

(2) En raisonnant de manière similaire à (1), on voit que la matrice $A+(1-a)\,\mathrm{id}$ a rang $n-1$ et que la dernière valeur propre est $(n-1)(1-a)$. Des cas sont à distinguer :
— Si $a=1$, la forme quadratique Q a rang 1 est elle a signature $(1,0)$;
— Si $a<1$, la forme quadratique Q a signature $(1,n-1)$;
— Si $a>1$, la forme quadratique Q a signature $(n-1,1)$.
Ceci conclut l'exercice. □

Exercice 16. On se place sur l'espace vectoriel $E=C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ des applications indéfiniment différentiables de la droite réelle, à valeurs complexes. Soit $D(f)=f'$ l'application définie de E dans E qui associe à toute application $f\in E$ sa dérivée f'.

1. Montrer que D est une application linéaire allant de E dans E.
2. Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. Montrer que la famille $\{x \mapsto e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbf{R}}$ d'éléments de E est libre.

Démonstration. (1) La dérivée d'une fonction indéfiniment différentiable est encore indéfiniment différentiable. La linéarité suit de la linéarité de la dérivée.

(2) Un réel λ est une valeur propre pour D si et seulement s'il existe une fonction indéfiniment différentiable non identiquement nulle f telle que $D(f) = \lambda f$. L'équation différentielle $f' - \lambda f = 0$ a solution $e^{\lambda x}$.

(3) Ceci est une conséquence du fait que les espaces propres sont en somme directe. □

Exercice 17. Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbf{C}$ et les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (1) Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2\cos\theta + 1$. Le discriminant Δ du polynôme caractéristique vefifie $\frac{\Delta}{4} = (\cos\theta)^2 - 1 = -(\sin\theta)^2$. Les racines du polynôme caractéristique sont donc $\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$ avec $i^2 = -1$. Le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - e^{i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix}$$

est engendré par le vecteur $ie_1 + e_2$. De manière similaire le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - e^{-i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix}$$

est engendré par le vecteur $ie_1 - e_2$.

(2) Cette matrice a même polynôme caractéristique que la première, donc même valeurs propres. On peut voir aisément que $ie_1 - e_2$ (resp. est $ie_1 + e_2$) un vecteur propre pour $e^{i\theta}$ (resp. $e^{-i\theta}$).

(3) Le polynôme caractéristique de la matrice est $x^3 - 1$. Soit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ une racine troisième primitive de l'unité. Pour $k = 0, 1, 2$ on pose

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \end{pmatrix}$$

On vérifie à la main (en utilisant $\omega^3 = 1$) que v_k est un vecteur propre pour ω^{3-k}.

(4) On calcule le polynôme caractéristique de la matrice $3D$. On a

$$\begin{aligned} P_{3D}(x) &= \det \begin{pmatrix} x+2 & 2 & -1 \\ -1 & x+2 & 2 \\ 2 & -1 & x+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ -1 & x+2 & 2 \\ 2 & -1 & x+2 \end{pmatrix} \\ &= (x+3)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+2 & 2 \\ 2 & -1 & x+2 \end{pmatrix} = (x+3)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & x+3 & 3 \\ 2 & -3 & x \end{pmatrix} \\ &= (x+3)\det \begin{pmatrix} x+3 & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix} = (x+3)(x^2 + 3x + 9). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice D est donc

$$P_D(x) = (x+1)(x^2+x+1).$$

Soit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ avec $i^2 = -1$ une racine primitive troisième de l'unité. Les valeurs propres de D sont 1, ω et $-\omega$.

On calcule l'espace propre pour la valeur propre 1. On a

$$3D + 3\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque l'identité $C_1 + C_2 + C_3$ entre colonnes. Puisque la matrice $3D + 3\,\mathrm{id}$ a rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

On calcule l'espace propre pour la valeur propre ω. On a

$$3D - 3\omega\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -2-3\omega & -2 & 1 \\ 1 & -2-3\omega & -2 \\ -2 & 1 & -2-3\omega \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{L_1+2L_2}{3} \to L_1} \begin{pmatrix} \omega & 2(\omega+1) & 0 \\ 1 & -2-3\omega & -2 \\ -2 & 1 & -2-3\omega \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{L_3+2L_2}{3} \to L_3} \begin{pmatrix} \omega & 2(\omega+1) & 0 \\ 1 & -2-3\omega & -2 \\ 0 & 2\omega+1 & \omega+2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que le vecteur $v_\omega = 2(\omega+1)e_1 + \omega e_2 - \omega e_3$ est une base du noyau de $D - \omega\,\mathrm{id}$.

De manière similaire on voit que $v_{-\omega} = 2(1-\omega)e_1 - \omega e_2 + \omega e_3$ est une base de l'espace propre pour la valeur propre $-\omega$.

En conclusion une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{3}}v_1$, $\frac{1}{2}v_\omega$ et $\frac{1}{2}v_{-\omega}$. (On remarquera que $|\omega| = 1$ et $|\omega + 1| = 1$.) $\square$

Exercice 18. Soit E un espace euclidien de dimension n et $f : E \to E$ une application linéaire autoadjointe. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées de manière croissante. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Démonstration. Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base orthonormée telle que v_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_i. Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ avec $x_i \in \mathbf{R}$. Alors $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i v_i$ et

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

car la base $v_1, \ldots, v_n$ est orthonormée. En utilisant l'estimation $\lambda_1 x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n x_i^2$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on conclut. $\square$

Espaces hermitiens

Exercice 19. On munit $\mathbf{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\cdot \mid \cdot)$ usuel et l'on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique. Expliquer pourquoi les matrices suivantes sont diagonalisables dans une base orthonormée. Puis, pour chacune d'elles, calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & i \\ -i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+2i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Démonstration. A) La matrice A est hermitienne, donc normale. Elle se diagonalise donc dans une base orthonormée. On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-4 & -i & -i \\ i & x-4 & -1 \\ i & -1 & x-4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-4 & -i & -i \\ i & x-4 & -1 \\ 0 & 3-x & x-3 \end{pmatrix} \\ &= (x-3)\det \begin{pmatrix} x-4 & -i & -i \\ i & x-4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (x-3)\det \begin{pmatrix} x-4 & -2i & -i \\ i & x-5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (x-3)\det \begin{pmatrix} x-4 & -2i \\ i & x-5 \end{pmatrix} = (x-3)(x^2-9x+18) = (x-3)^2(x-6). \end{aligned}$$

On calcule l'espace propre $E_3 = \ker(A - 3\,\mathrm{id})$.

$$A - 3\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

La matrice $A - 3\,\mathrm{id}$ a rang 1 et une base de son noyau est $v_3 = e_2 - e_3$ et $w_3 = ie_1 - e_2$. On applique le procédé de Gram-Schmidt :

$$\tilde{w}_3 = w_3 - \frac{(v_3 \mid w_3)}{(v_3 \mid v_3)} v_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de E_3 est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_3$ et $\frac{2}{3}\tilde{w}_3$. Comme les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et comme E_3 est l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par $v_6 = ie_1 + e_2 + e_3$, l'espace propre pour la valeur propre 6 est l'espace vectoriel engendré par v_6. En conclusion une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_3$, $\frac{2}{3}\tilde{w}_3$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}v_6$.

B) La matrice B est hermitienne, donc diagonalisable dans une base orthonormée. On calcule le polynôme caractéristique de B :

$$P_B(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -i \\ 0 & x-1 & 1 \\ i & 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3 - 2(x-1) = (x-1)(x^2-2x-1)$$

Les valeurs propres sont donc 1 et $1 \pm \sqrt{2}$.

On calcule l'espace propre $E_1 = \ker(B - \mathrm{id})$:

$$B - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice de rang 2 et son noyau est engendré par le vecteur $v_1 = ie_1 + e_2$.

On calcule l'espace propre $E_{1\pm\sqrt{2}} = \ker(B - (1 \pm \sqrt{2})\,\mathrm{id})$:

$$B - (1 \pm \sqrt{2})\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & 0 & i \\ 0 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ -i & -1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Son noyau est engendré par le vecteur $v_{1\pm\sqrt{2}} = \pm ie_1 \mp e_2 + \sqrt{2}e_3$. En conclusion, une base orthonormée de vecteur propres est

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}v_1, \qquad \tfrac{1}{2}v_{1+\sqrt{2}}, \qquad \tfrac{1}{2}v_{1-\sqrt{2}}.$$

C) La matrice C est anti-hermitienne, donc diagonalisable en base orthonormée. On calcule son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_C(x) &= \det \begin{pmatrix} x & -1 & -i \\ 1 & x & 1 \\ -i & -1 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+i & 0 & -(x+i) \\ 1 & x & 1 \\ -i & -1 & x \end{pmatrix} \\ &= (x+i)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -i & -1 & x \end{pmatrix} = (x+i)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ -i & -1 & x-i \end{pmatrix} \\ &= (x+i)\det \begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & x-i \end{pmatrix} = (x+i)(x^2 - ix + 2) = (x+i)^2(x-2i). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont i et $2i$.

On calcule l'espace propre $E_i = \ker(C - i\,\mathrm{id})$:

$$C + i\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -1 & i & -1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de rang 1. Une base de son noyau est $v_i = e_1 - e_3$ et $w_i = ie_1 + e_2$. On applique la méthode de Gram-Schmidt :

$$\tilde{w}_i = w_i - \frac{(w_i \mid v_i)}{(v_i \mid v_i)}v_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de l'espace propre E_i est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_i$ et $\frac{1}{2}\tilde{w}_i$.

Au lieu de calculer l'espace propre $E_{2i} = \ker(C - 2i\,\mathrm{id})$, on remarque que E_{2i} est l'orthogonale de E_i. Puisque E_i est donné par l'équation $ix_1 + x_2 + ix_3 = 0$, on trouve que E_{2i} est engedré par le vecteur $v_{2i} = ie_1 - e_2 + ie_3$. En conclusion une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_i$, $\frac{1}{2}\tilde{w}_i$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}v_{2i}$.

D) La matrice D vérifie l'identité ${}^tD\bar{D} = \mathrm{id}$, donc elle est diagonalisable en base orthonormée.

On calcule le polynôme caractéristique de $3D$:

$$\begin{aligned}
P_{3D}(x) &= \det\begin{pmatrix} x-(1+2i) & -(i+1) & -(i+1) \\ i+1 & x-(1+2i) & i-1 \\ i+1 & i-1 & x-(1+2i)\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} x-(1+2i) & -(i+1) & -(i+1) \\ i+1 & x-(1+2i) & i-1 \\ 0 & -(x-3i) & x-3i\end{pmatrix} \\
&= (x-3i)\det\begin{pmatrix} x-(1+2i) & -(i+1) & -(i+1) \\ i+1 & x-(1+2i) & i-1 \\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \\
&= (x-3i)\det\begin{pmatrix} x-(1+2i) & -2(i+1) & -(i+1) \\ i+1 & x-(i+2) & i-1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= (x-3i)\det\begin{pmatrix} x-(1+2i) & -2(i+1) \\ i+1 & x-(i+2)\end{pmatrix} = (x-3i)(x-3(i+1)x+9i)
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de D est donc $P_D(x) = (x-i)(x^2-(i+1)x+i) = (x-i)^2(x-1)$. On calcule l'espace propre $E_i = \ker(D - i\,\mathrm{id})$.

$$3D - 3i\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1-i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1-i\end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(On remarquera l'identité $\frac{i+1}{i-1} = i$.) Il s'agit d'une matrice de rang 1 et une base de E_i est $v_i = e_2 - e_3$ et $w_i = ie_1 - e_2$. On applique la méthode de Gram-Schmidt :

$$\tilde{w}_i = w_i - \frac{(w_i \mid v_i)}{(v_i \mid v_i)} v_i = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -1\end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de E_i est dont $\frac{1}{\sqrt{2}}v_i$ et $\frac{1}{2}\tilde{w}_i$. Au lieu de calculer l'espace propre pour $E_1 = \ker(D - \mathrm{id})$, on remarque que c'est l'orthogonal de E_i et donc engendré par le vecteur $v_1 = e_1 - ie_2 - ie_3$.

En conclusion, une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_i$, $\frac{1}{2}\tilde{w}_i$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}v_1$. □

Exercice 20. On se place sur l'espace $C^0([-\pi,\pi],\mathbf{C})$ muni du produit

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Montrer que cette formule définit une forme hermitienne et que la famille de fonctions $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbf{Z}$, est orthonormée.

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$, et tout $f, f', g \in C^0([-\pi,\pi],\mathbf{C})$, on a

$$(\lambda f + \lambda' f' \mid g) = \lambda(f \mid g) + \lambda'(f' \mid g).$$

D'autre part on a $(f \mid g) = \overline{(g \mid f)}$. De cela suit la semi-linéarité dans la deuxième variable. En outre, pour une fonction continue $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbf{C}$,

$$(f \mid f) = \int_{\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \geq 0.$$

Par continuité de f, cette intégrale est nulle si et seulement si f est identiquement nulle. Cela montre que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme hermitienne sur $C^0([-\pi, \pi], \mathbf{C})$. $\square$

Exercice 21. Soit $E = \mathbf{C}^3$ muni de sa structure hermitienne canonique. Soit F le sous-espace des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in E$ satisfaisant l'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.

1. Calculer l'orthogonal de F.
2. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.
3. Trouver une base orthonormée de F.

Démonstration. (1) On considère le vecteur $v = e_1 - e_2 - ie_3$. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ on a $(x \mid v) = x_1 - x_2 + ix_3$. Par définition, $F^\perp$ est l'espace vectoriel engendré par v.

(2) Soit p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$). Alors, pour tout $x \in \mathbf{C}^3$ on a

$$p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x) = x - \frac{(x \mid v)}{(v \mid v)} v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - x_2 + ix_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

En appliquant cette formule avec les vecteurs de la base canonique on trouve

$$p_F(e_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad p_F(e_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad p_F(e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -i \\ i \\ -1 \end{pmatrix},$$

La matrice de la projection p_F est donc

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Une base de l'espace vectoriel F est $w_1 = e_1 + e_2$ et $w_2 = e_1 + ie_3$. On applique la méthode de Gram-Schmidt :

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \frac{(w_2 \mid w_1)}{(w_1 \mid w_1)} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de F est $\frac{1}{\sqrt{2}} w_1$ et $\frac{1}{2}\tilde{w}_2$. $\square$

Exercice 22. On considère les applications suivantes, définies pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$.

1. $\varphi_1(x, y) = x_1\bar{y_2} + x_2\bar{y_1}$.
2. $\varphi_2(x, y) = 2x_1\bar{y_1} + ix_1\bar{y_2} + ix_2\bar{y_1} + 5x_2\bar{y_2}$,
3. $\varphi_3(x, y) = (1 + i)x_1\bar{y_1} + 2x_1\bar{y_2} + 2x_2\bar{y_1} + 5x_2\bar{y_2}$,
4. $\varphi_4(x, y) = x_1\bar{y_1} + (1 + i)x_1\bar{y_2} + (1 - i)x_2\bar{y_1} + 2x_2\bar{y_2}$.

Déterminer lesquelles de ces applications sont des formes hermitiennes et, si oui, écrire leurs matrices dans la base canonique de $\mathbf{C}^2$ et donner la forme quadratique hermitienne Q_i associée.

Démonstration. On résume les réponse dans le tableau suivant :

	hermitienne ?	matrice	forme quadratique
ϕ_1	oui	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1$
ϕ_2	non	-	-
ϕ_3	non	-	-
ϕ_4	oui	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{smallmatrix}\right)$	$x_1\bar{x_1} + (1+i)x_1\bar{x_2} + (1-i)x_2\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2}$

□

Exercice 23. On note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées dans $\mathbf{C}^3$ et l'on considère les formes quadratiques hermitiennes ci-dessous. Écrire chacune d'elles comme somme de carrés de modules de formes linéaires indépendantes, et déterminer sa signature et son rang.

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_1} - ix_1\bar{x_2} + ix_2\bar{x_1} - x_1\bar{x_3} - x_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2}$.
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_1} - 2ix_1\bar{x_2} + 2ix_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + 2x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2}$.
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x_2} + x_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + (1+i)x_2\bar{x_3} + (1-i)x_3\bar{x_2}$.

Démonstration. (1) On applique la version hermitienne de l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1\bar{x_1} - ix_1\bar{x_2} + ix_2\bar{x_1} - x_1\bar{x_3} - x_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2} \\ &= |x_1 + ix_2 - x_3|^2 + |x_2|^2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une forme hermitienne de signature $(2, 0)$.

(2) On applique la version hermitienne de l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1\bar{x_1} - 2ix_1\bar{x_2} + 2ix_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2} + 2x_3\bar{x_3} - 2ix_2\bar{x_3} + 2ix_3\bar{x_2} \\ &= |x_1 + 2ix_2 - ix_3| - 2|x_2|^2 + |x_3|^2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une forme hermitienne de signature $(2, 1)$.

(3) On applique la version hermitienne de l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1\bar{x_2} + x_2\bar{x_1} + ix_1\bar{x_3} - ix_3\bar{x_1} + (1+i)x_2\bar{x_3} + (1-i)x_3\bar{x_2} \\ &= y_1\bar{y}_2 + \bar{y}_1 y_2 - 2|x_3|^2 \end{aligned}$$

où $y_1 = x_1 + (1-i)x_3$ et $y_2 = x_2 - ix_3$.

Il s'agit donc d'une forme hermitienne de signature $(1, 2)$. □

Exercice 24. Soit E un espace hermitien de dimension finie et $f\colon E \to E$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{im}(f)^\perp = \ker(f^*)$. On suppose de plus f normale. Montrer les égalités

$$\ker(f) = \ker(f^*), \qquad \mathrm{im}(f)^\perp = \ker(f).$$

Démonstration. Soit $v \in \ker(f^*)$ et $w \in \mathrm{im}(f)$. Par définition $w = f(w')$ pour un certain $w' \in E$. On a alors

$$(w \mid v) = (f(w') \mid v) = (w' \mid f^*(v)) = (w' \mid 0) = 0.$$

Comme w est arbitraire, ceci montre que v appartient à l'orthogonale de l'image de f. Soit $v \in \mathrm{im}(f)^\perp$. Alors,

$$0 = (f(f^*(v)) \mid v) = (f^*(v) \mid f^*(v)),$$

ce qui implique $f^*(v) = 0$. Or, si f est normale, *i.e.* elle commute avec son adjoint, on a

$$\|f(x)\|^2 = (f(x) \mid f(x)) = (x \mid f^*(f(x))) = (x \mid f(f^*(x))) = (f^*(x) \mid f^*(x)) = \|f^*(x)\|^2.$$

En particulier $\ker(f) = \ker(f^*)$ et l'autre égalité s'en suit. □