Espace dual

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

déf. L'espace dual est l'ensemble des applications linéaires $\varphi : E \to \mathbb{R}$. On le note E^*.

Une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ on l'appelle aussi forme linéaire.

Exemple: 1) $E = \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2)$.

$e_1^*(x) = x_1 \qquad e_2^*(x) = x_2$.

Toute forme linéaire sur E s'écrit de la forme

$$\varphi(x) = a \underset{e_1^*(x)}{x_1} + b \underset{e_2^*(x)}{x_2}. \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

On a : $\varphi = a e_1^* + b e_2^* \in E^*$.

2) $E = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$

$e_i^*(x) = x_i$ forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$e_1^*, \dots, e_n^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ — $(\mathbb{R}^n)^*$ est un espace vectoriel

Lemme: $e_1^*, \dots, e_n^*$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n)^*$.

démo. (Libre): Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*}$

Cela signifie la chose suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda_1 \underbrace{e_1^*(x)}_{= x_1} + \lambda_2 \underbrace{e_2^*(x)}_{= x_2} + \dots + \lambda_n \underbrace{e_n^*(x)}_{= x_n} = 0_{\mathbb{R}}$$

$x = e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \longrightarrow \lambda_1 = 0$

$x = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \longrightarrow \lambda_2 = 0$

$\vdots$

$x = e_n = (0, 0, \dots, 1) \longrightarrow \lambda_n = 0$

$\longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \Rightarrow e_1^*, \dots, e_n^*$ libre

(Génératrice) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On veut écrire

$$\varphi = \varphi_1 e_1^* + \varphi_2 e_2^* + \dots + \varphi_n e_n^*$$

avec $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(e_1) = \varphi_1 \underbrace{e_1^*(e_1)}_{1} + \varphi_2 \underbrace{e_2^*(e_1)}_{0} + \dots + \varphi_n \underbrace{e_n^*(e_1)}_{0}$$

$$= \varphi_1$$

$$\varphi(e_i) = \varphi_i$$

Il suffit de montrer qu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = \varphi(e_1) \underbrace{e_1^*(x)}_{x_1} + \dots + \varphi(e_n) \underbrace{e_n^*(x)}_{x_n}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \underset{\varphi \text{ linéaire}}{=} \varphi(e_1) x_1 + \dots + \varphi(e_n) x_n.$$

$\square$

Base duale: Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de l'esp vectoriel E. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe une unique $v_i^* \in E^*$ t.q.

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, $v_1^*, \dots, v_n^*$ forment une base de E^*.

déf. La base $v_1^*, \dots, v_n^*$ s'appelle la base duale de $v_1, \dots, v_n$.

démo: On pose $v_i^*(x) = x_i$ où $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ — ici j'utilise que $v_1, \dots, v_n$ base.

Exo: 1) v_i^* est linéaire.

2) $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour le reste de l'énoncé il suffit de copier la preuve plus haut en remplaçant e_i par v_i et e_i^* par v_i^*. $\square$

En pratique: $E = \mathbb{R}^n$. Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Étant donnée une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on peut regarder la matrice associée

$$\left(\overset{a_1}{\varphi(e_1)} \ \overset{a_2}{\varphi(e_2)} \ \dots \ \overset{a_n}{\varphi(e_n)} \right) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$$

(Rmq: $\varphi = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \dots + a_n e_n^*$)

Question: quelle est la matrice de v_i^*?

Soit P la matrice de changement de base de $e_1, \dots, e_n$ à $v_1, \dots, v_n$.

(Les colonnes de P sont les vecteurs $v_1, \dots, v_n$.)

Lemme. $v_i^* = e_i^* P^{-1}$ = i-ème ligne de P^{-1}.

démo. On remarque que $v_i = P e_i$. (v_i est la i-ème colonne de P.) On calcule:

$$v_i^*(v_j) = e_i^* \underbrace{P^{-1} P}_{id} e_j = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

$v_1^* = (-3 \ \ 2) \qquad v_2^* = (\frac{5}{3} \ \ -1)$.

$v_1^*(v_1) = (-3 \ \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1$

$v_1^*(v_2) = (-3 \ \ 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

$v_2^*(v_1) = (\frac{5}{3} \ \ -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 - 5 = 0$ $\longrightarrow v_1^*, v_2^*$ est la base duale.

$v_2^*(v_2) = (\frac{5}{3} \ \ -1) \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 10 - 9 = 1$

Formes bilinéaires

$E = \mathbb{R}$-espace vectoriel.

<u>déf:</u> Une <u>forme bilinéaire</u> est une application

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

1) $\varphi(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda \varphi(v,w) + \lambda' \varphi(v',w)$ $\quad \forall v, v', w \in E$, $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

2) $\varphi(v, \mu w + \mu' w') = \mu \varphi(v,w) + \mu' \varphi(v,w')$ $\quad \forall v, w, w' \in E$, $\forall \mu, \mu' \in \mathbb{R}$.

On dit que φ est <u>symétrique</u>

$$\varphi(v,w) = \varphi(w,v) \quad \forall v, w \in E.$$

<u>Exemples:</u> $E = \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2)$.

1) $\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x', y) = (\lambda x_1 + \lambda' x_1') y_1 + (\lambda x_2 + \lambda' x_2') y_2$$

$$= \lambda \underbrace{(x_1 y_1 + x_2 y_2)}_{\varphi(x,y)} + \lambda' \underbrace{(x_1' y_1 + x_2' y_2)}_{\varphi(x',y)}.$$

$\longrightarrow$ φ est linéaire ds la 1ère variable

<u>Rmq:</u> φ est symétrique + linéaire dans la 1ère variable

$=$ φ est bilinéaire.

2) $\varphi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. bilinéaire symétrique.

3) $\varphi(x,y) = x_1 y_1$ bilinéaire symétrique

4) $\varphi(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ bilinéaire symétrique.

5) $\varphi(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. bilinéaire

anti-symétrique: $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

Matrice d'une forme bilinéaire

Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de l'espace vectoriel E. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

déf: La matrice de φ dans la base $v_1, \dots, v_n$ est la matrice

$$\underset{M_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Mat}(\varphi)} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \varphi(v_1,v_2) & \dots & \varphi(v_1,v_n) \\ \varphi(v_2,v_1) & \varphi(v_2,v_2) & \dots & \varphi(v_2,v_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_n,v_1) & \varphi(v_n,v_2) & \dots & \varphi(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

Lemme φ est symétrique ssi $\mathrm{Mat}(\varphi)$ est symétrique

déf: $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^tA = A$.

démo $(\Longrightarrow)$ $A = \mathrm{Mat}(\varphi) = (a_{ij})$;

avec $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$

A est symétrique $\Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Longleftrightarrow \varphi(v_i,v_j) \underset{}{=} \varphi(v_j,v_i) \quad \forall i,j$

$(\Longleftarrow)$ Soit $x, y \in E$.

$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$\varphi(x,y) \underset{\text{lin 1ère var.}}{=} x_1\varphi(v_1,y) + x_2\varphi(v_2,y) + \dots + x_n\varphi(v_n,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(v_i,y)$$

$$\underset{\text{lin 2ème var}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\varphi(v_i,v_j)}_{= \varphi(v_j,v_i)} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(v_j,v_i)$$

$= \varphi(y,x)$. Donc φ symétrique. $\square$

Exemples: $E = \mathbb{R}^2$. On calcule les matrices dans la base canonique. $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

1) $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \varphi(e_1,e_1) = 1$, $\varphi(e_1,e_2) = 0$, $\varphi(e_2,e_2) =$

produit scalaire standard de $\mathbb{R}^2$

2) $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

3) $\varphi(x,y) = x_1y_1$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

4) $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

5) $\varphi(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \longleftarrow$ pas symétrique

$\varphi(x,y) = a x_1y_1 + b x_1y_2 + c x_2y_1 + d x_2y_2$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = A$

φ est symétrique $\Longleftrightarrow$ A symétrique $\Longleftrightarrow b = c$

Propriété Soit $x, y \in E$. Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de E.

$x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$

$y = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$

$A = \mathrm{Mat}(\varphi)$ dans la base $v_1, \dots, v_n$.

Alors $\varphi(x,y) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

$$\varphi(x,y) \underset{\substack{x = \sum x_i v_i \\ y = \sum y_j v_j}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(v_i,v_j).$$

$$(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\varphi(v_1,v_1) & \dots & \varphi(v_1,v_n)\\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(v_n,v_1) & \dots & \varphi(v_n,v_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(v_i,v_1), \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(v_i,v_2), \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(v_i,v_n)\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(v_i,v_j) = \varphi(x,y). \quad \square$$

Changement de base. Soit $v_1', \dots, v_n'$ une autre base de E. Soit P la matrice de changement de base de $v_1, \dots, v_n$ à $v_1', \dots, v_n'$ (Les colonnes de P sont les coordonnées des v_i' dans la base $v_1, \dots, v_n$.)

$x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$

$= x_1'v_1' + \dots + x_n'v_n'$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$$

A = matrice de φ dans la base $v_1, \dots, v_n$

$A' =$ ——————————— $v_1', \dots, v_n'$

Formule de chgt de base: $A' = {}^tPAP$.

démo: $\varphi(x,y) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$= (x_1', \dots, x_n')\, A' \begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix}$

$= (x_1', \dots, x_n')\, {}^tPAP \begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix} \quad \forall x,y \in E$

$\Longrightarrow A' = {}^tPAP$ $\square$

Noyau et rang d'une forme bilinéaire

déf. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique. Le noyau de φ est $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\}$.

Lemme Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de φ dans la base canonique. Alors

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,A$.

démo. $(\supseteq)$ Soit $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = 0$. Étant donné $y \in \mathbb{R}^n$ on a:

$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) = {}^ty\,\underbrace{Ax}_{0} = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$(\subseteq)$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$0 = \varphi(x,y) = \varphi(y,x) = {}^tyAx = {}^ty\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

$Ax = \begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

$y = e_1 \longrightarrow {}^ty\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} = (1\ 0 \dots 0)\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} = x_1' = 0$

$y = e_2 \quad {}^ty\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} = x_2' = 0$

$\vdots$

$y = e_n \quad {}^ty\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} = x_n' = 0$

$\longrightarrow x_i' = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

$\Longrightarrow Ax = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = 0$

$\longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$ $\square$

Déf. Le rang d'une forme bilinéaire symétrique est le rang de la matrice de φ dans une base. (Cela ne dépend pas de la base choisie.)

Exemples $E = \mathbb{R}^2$

1) $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ $\quad \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ $\quad \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$

2) $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ $\quad \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg} = 2$ $\quad \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$

3) $\varphi(x,y) = x_1y_1$ $\quad \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ $\quad \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : x = 0\right\}$

4) $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rg}(\varphi) = 2$ $\quad \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.