Rappel: E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire symétrique.

$v_1, \dots, v_n$ = base de E

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \varphi(v_1,v_2) & \dots & \varphi(v_1,v_n) \\ \varphi(v_2,v_1) & \varphi(v_2,v_2) & \dots & \varphi(v_2,v_n) \\ \vdots & & & \\ \varphi(v_n,v_1) & \dots & & \varphi(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

Propriétés: $\quad {}^tA = A$.

- $x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$

  $y = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$

  $$\varphi(x,y) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- $w_1, \dots, w_n$ base de E

  P = matrice de chgt de base

  B = matrice de φ dans la base $w_1, \dots, w_n$

  $\Longrightarrow \quad B = {}^tPAP.$

Formes quadratiques

$E = \mathbb{R}$-espace vectoriel

déf. Une forme quadratique est une fonction $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$Q(v) = \varphi(v,v) \quad \text{pour tout } v \in E.$$

La forme bilinéaire φ est appelée la forme polaire de Q.

on verra plus tard qu'elle est unique

Formule. Soit $Q(v) = \varphi(v,v)$ avec φ bilinéaire symétrique. Alors :

1) $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in E$;

2) $Q(v+w) = Q(v) + 2\varphi(v,w) + Q(w)$ pour tout $v, w \in E$;

3) $\varphi(v,w) = \frac{1}{2}\left[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\right]$;

4) $\varphi(v,w) = \frac{1}{4}\left(Q(v+w) - Q(v-w)\right]$.

Rmq : (3) dit que φ est complètement déterminée par Q. La forme polaire est unique.

déf : (3) et (4) sont appelées formules de polarisation.

démo : 1) $Q(\lambda v) = \varphi(\lambda v, \lambda v) = \lambda \varphi(v, \lambda v)$
$= \lambda^2 \varphi(v,v) = \lambda^2 Q(v)$.

2) $Q(v+w) = \varphi(v+w, v+w) = \varphi(v, v+w) + \varphi(w, v+w)$

$= \underbrace{\varphi(v,v)}_{Q(v)} + \underbrace{\varphi(v,w)}_{\varphi(v,w)} + \underbrace{\varphi(w,v)}_{\varphi(v,w)} + \underbrace{\varphi(w,w)}_{Q(w)}$

$= Q(v) + 2\varphi(v,w) + Q(w)$.

3) Suit de (2).

4) $Q(v+w) \overset{(2)}{=} Q(v) + 2\varphi(v,w) + Q(w)$

$Q(v-w) = Q(v) + 2\underbrace{\varphi(v,-w)}_{= -\varphi(v,w)} + \underbrace{Q(-w)}_{= (-1)^2 Q(w) = Q(w)}$

$= Q(v) - 2\varphi(v,w) + Q(w)$.

$\longrightarrow Q(v+w) - Q(v-w) = 4\varphi(v,w)$. $\square$

déf : La matrice d'une forme quadratique dans une base est la matrice de sa forme polaire.
Le noyau d'une forme quadratique est le noyau de sa forme polaire.
Le cône isotrope d'une forme quadratique Q sur E est :

$$C(Q) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E : Q(x) = 0\}.$$

$\mathrm{Ker}(Q) \subseteq C(Q)$

MAIS EN GÉNÉRAL CE N'EST PAS ÉGAL !

Exemples: $E = \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2)$.

1) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

$\mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

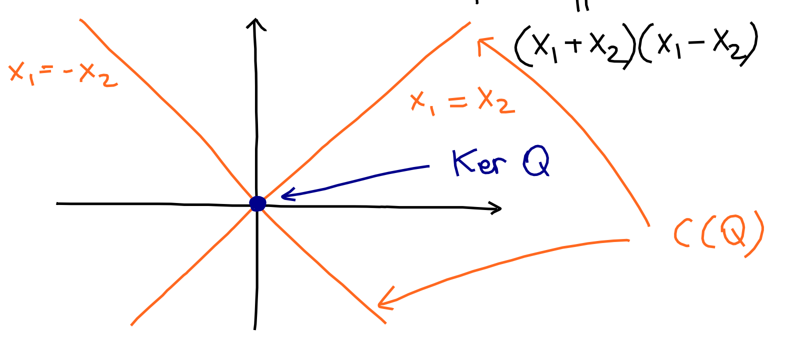
$\overset{\shortparallel}{C(Q)} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0 \} = \{0\}$.

2) $Q(x) = x_1^2 - x_2^2 \qquad \varphi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}(Q) = \{0\}$

$C(Q) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \underset{\underset{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{\shortparallel}}{x_1^2 - x_2^2} = 0 \} = \{ x_1 = \pm x_2 \}$



Rmq: $E = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$

$\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. avec $a_{ij} = a_{ji}$.

$Q(x) = \varphi(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$.

$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2}_{\text{carrés}} + \underbrace{\sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j}_{\text{doubles produits}}$.

où $b_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 2 a_{ij}. & i < j \end{cases}$.

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} & \dots & \frac{b_{1n}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} & \dots & \frac{b_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{1n}}{2} & \frac{b_{2n}}{2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples: $n = 2$

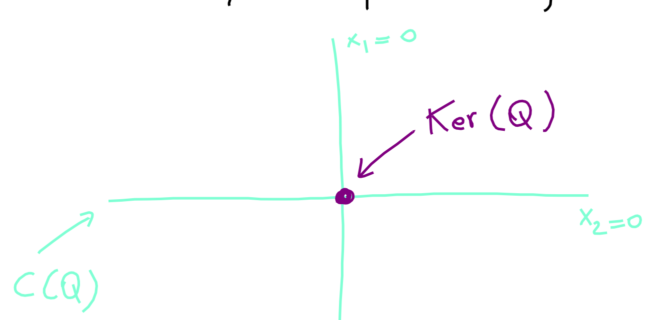
$Q(x) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$

$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

3) $Q(x) = x_1 x_2 \qquad \mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}\, Q = \{0\}$.

$C(Q) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 x_2 = 0 \} = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$



$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \qquad Q(y_1+y_2, y_1-y_2) = (y_1+y_2)(y_1-y_2)$

$= y_1^2 - y_2^2$.

Signature d'une forme quadratique

$E = \mathbb{R}$ - espace vectoriel de dim finie.

déf : Soit $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique

1) Q est positive si $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;

2) Q est définie positive si elle est positive et
$Q(x) = 0 \implies x = 0$;

3) Q est négative si $Q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$;

4) Q est définie négative si elle est négative
et $Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

La signature de Q est (p,q) avec

$$p = \max \left\{ \dim F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subseteq E \text{ sous-esp. vectoriel t.q.} \\ Q \text{ est définie positive sur } F \end{array} \right\}$$

$$\left(Q(x) \geq 0 \ \forall x \in F;\ \underset{x \in F}{Q(x) = 0} \Rightarrow x = 0 \right)$$

$$q = \max \left\{ \dim F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subseteq E \text{ sous-esp. vectoriel t.q.} \\ Q \text{ est déf. négative sur } F \end{array} \right\}.$$

Exemple : la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_q^2$$

est de signature (p,q). De plus, on verra qu'à un chgt de coordonnées près, toute forme quadratique de signature (p,q) est de cette forme.

Réduction en somme de carrés de formes linéaires

E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie.

<u>Thm</u>: Soit Q une forme quadratique. Alors, il existe des formes linéaires, linéairement indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_{p+q} \in E^*$ t.q.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} \ell_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \ell_i(x)^2.$$

<u>Exemple</u>: 1) $Q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \overset{(*)}{=}$

$(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$. "compléter le carré"

$\overset{(*)}{=} (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$

$= (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 = \ell_1(x)^2 + \ell_2(x)^2$

$\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2$

$\ell_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$.

ℓ_1, ℓ_2 sont des formes lin. de matrices

$\ell_1 = (1, \frac{1}{2})$

$\ell_2 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow \ell_1, \ell_2$ sont lin. indép.

$p = 2$, $q = 0$.

2) $Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$.

$x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_2 + 2x_3)^2 - 4x_3^2 + x_3^2$

$= (x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2$.

$Q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2$.

$= \ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2$.

$\ell_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$

$\ell_2(x) = x_2 + 2x_3$

$\ell_3(x) = \sqrt{3}x_3$

formes linéaires

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

échelonnée, 3 pivot $\Rightarrow \ell_1, \ell_2, \ell_3$ lin. indép.

3) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$.

$= \underbrace{(x_1 + x_3)}_{\text{tout ce qui multiplie } x_2}\underbrace{(x_2 + 2x_3)}_{\text{tout ce qui multiplie } x_1} - 2x_3^2 \overset{(*)}{=}$

$\ell_1(x) + \ell_2(x) = x_1 + x_3$

$\ell_1(x) - \ell_2(x) = x_2 + 2x_3$

$= (\ell_1(x) + \ell_2(x))(\ell_1(x) - \ell_2(x)) - 2x_3^2$

$= \ell_1(x)^2 - \ell_2(x)^2 - 2x_3^2 = \ell_1^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2$.

$\ell_3(x) = \sqrt{2}x_3$

$\ell_1(x) = \dfrac{x_1 + x_2 + 3x_3}{2}$

$\ell_2(x) = \dfrac{x_1 - x_2 - x_3}{2}$

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 - L_2 \to L_2]{L_1 + L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

matrice échelonnée avec 3 pivots.

Bases orthogonales

E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire symétrique

<u>déf.</u> Une base $v_1, \dots, v_n$ de E est <u>orthogonale pour φ</u>

si $\varphi(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$.

<u>Thm:</u> Il existe des bases orthogonales pour φ.

<u>démo.</u> Soit $Q(v) = \varphi(v,v)$ la forme quadratique associée à φ. Il existe des formes linéaires

lin. indép.

$l_1, \dots, l_r$ et des nombres réels $a_i \in \mathbb{R}$

t.q. $Q(v) = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i(v)^2$.

<u>Problème</u>: $r \leq n$ et peut-être que $r < n$.

C'est-à-dire: $l_1, \dots, l_r \in E^*$ est libre mais pas forcément génératrice.

On complète la base: $l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_n \in E^*$

On pose $a_i = 0$ $\quad i = r+1, \dots, n$. Donc on a:

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(v)^2 .$$

Il existe une base $v_1, \dots, v_n$ de E t.q.

$$l_i = v_i^*$$

c'est-à-dire $l_i(v_k) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

J'affirme: $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale pour φ.

$$Q(v_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(v_k) = a_k$$

$$Q(v_j + v_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(v_j + v_k) = a_j + a_k .$$

$$j \neq k \qquad l_i(v_j + v_k) = l_i(v_j) + l_i(v_k) = \begin{cases} 1 & i=j\neq k \\ 1 & i=k\neq j \\ 0 & i\neq j, i \neq k \end{cases}$$

$$\varphi(v_i, v_j) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{Q(v_i+v_j)}_{a_i+a_j} - \underbrace{Q(v_i)}_{a_i} - \underbrace{Q(v_j)}_{a_j} \right] = 0$$

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale. $\square$

<u>Exemple</u> : Soient $\ell_1, \dots, \ell_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des formes linéaires lin. indépendantes.
On cherche $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ base t.q.

$$\ell_i = v_i^*.$$

Soit P la matrice de chgt de base :

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ v_1 & v_2 & & v_n \end{pmatrix}$$

i-ème colonne de P est v_i.

$\ell_i = v_i^* = i$-ème ligne de P^{-1}.

Pour trouver $v_1, \dots, v_n$ il s'agit de prendre les colonnes de l'inverse de la matrice qui a pour lignes $\ell_1, \dots, \ell_n$.

<u>Exemple</u> :

$$\ell_3(x) = x_3$$

$$\ell_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + 3x_3}{2}$$

$$\ell_2(x) = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2}$$

$$\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} L_1 + L_2 \to L_1 \\ L_1 - L_2 \to L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} L_1 - L_3 \to L_1 \\ L_2 - 2L_3 \to L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} & & & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

v_1, v_2, v_3 est une base orthogonale pour $x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$

$$\varphi(v_1, v_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{{}^t v_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$