Espaces euclidiens

<u>déf</u>. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un <u>produit scalaire</u> sur E est une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive, i.e. $\varphi(v,v) > 0$ pour $v \in E \setminus \{0\}$.
[Si $n = \dim E$, φ est de signature $(n,0)$.]
Un produit scalaire est noté $<v,v>$ plutôt que $\varphi(v,v)$. Un <u>espace euclidien</u> est la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

<u>Exemples</u>: 1) $E = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$<x,y> = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$<x,x> = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{de signature } (n,0)$$

$\longrightarrow$ produit scalaire!

2) $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$; $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$<f,g> := \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad \text{forme bilinéaire symétrique (linéarité de l'intégrale)}$$

$$<f,f> = \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geq 0} dt \geq 0$$

<u>Exercice</u>: si $f \neq 0$, alors $<f,f> > 0$.

Donc $f,g \longmapsto <f,g>$ est un produit scalaire.

Base orthonormée:

Soit E un espace euclidien de dimension finie n

<u>déf</u>. On dit qu'une base $v_1, \dots, v_n$ de E est <u>orthonormée</u> si

$$<v_i, v_j> = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

<u>Lemme</u>: Il existe des bases orthonormées

<u>démo</u>. On a vu qu'il existe des bases orthogonales pour une forme quadratique donnée.
Soit $v_1, \dots, v_n$ une base orthogonales pour le produit scalaire $<x,y>$:

$$<v_i, v_j> = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Maintenant $<v_i, v_i> > 0$ par définition de produit scalaire. On pose

$$w_i = \frac{v_i}{\sqrt{<v_i,v_i>}}.$$

$$<w_i, w_i> = \left< \frac{v_i}{\sqrt{<v_i,v_i>}}, \frac{v_i}{\sqrt{<v_i,v_i>}} \right>$$

$$= \frac{1}{<v_i,v_i>} <v_i, v_i> = 1.$$

$i \neq j$

$$<w_i, w_j> = \frac{1}{\sqrt{<v_i,v_i><v_j,v_j>}} <v_i, v_j> = 0$$

Donc $w_1, \dots, w_n$ est une base orthonormée. $\square$

<u>Rmq</u>: Soit E un espace euclidien de dim n.
Soit $v_1, \dots, v_n$ une base orthonormée.

$$E \ni x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

Expression du produit scalaire 1^er exemple ↓

$$<x,y> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{<v_i, v_j>}_{\substack{0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j}} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Norme euclidienne

déf. Soit E un espace euclidien.

Pour $v \in E$ on pose
$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$
C'est la norme du vecteur v.

Lemme: On a les trois propriétés suivantes:

1) $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$;

OK par définition de produit scalaire

3) (Inégalité triangulaire):
$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

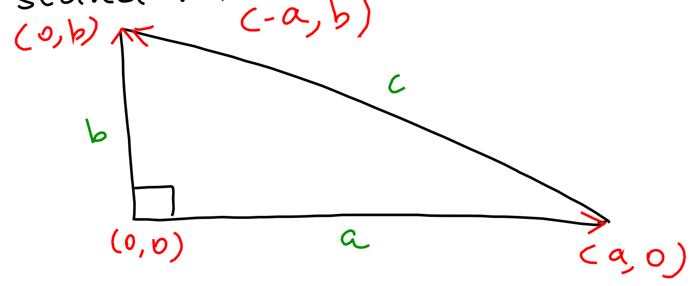
Soit E un espace euclidien. Alors
$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$
$$\left[\iff \langle v,w\rangle^2 \leq \langle v,v\rangle \langle w,w\rangle.\right]$$
On a égalité si et seulement si v, w sont linéairement dépendants.

démo. On suppose que v, w sont lin. dép. On peut supposer $w = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\langle v,w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \langle v,v\rangle^2$$
$$= \langle v,v\rangle \cdot \underbrace{\langle \lambda v, \lambda v\rangle}_{\langle w,w\rangle}.$$
Supposons v, w linéairement indépendants.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on $\lambda v + w \neq 0$. Donc
$$0 < \langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = \lambda^2 \langle v,v\rangle + 2\lambda \langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$$
$$0 > \frac{\Delta}{4} = \langle v,w\rangle^2 - \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle.$$
$$\implies \langle v,w\rangle^2 < \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle. \qquad \square$$

démo de l'inégalité triangulaire:
$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle$$
$$= \|v\|^2 + 2\underbrace{\langle v,w\rangle}_{\leq |\langle v,w\rangle|} + \|w\|^2$$
$$\leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2$$
$$\overset{CS}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$$
$$= (\|v\| + \|w\|)^2. \qquad \square$$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard.



$$c := \|(-a,b)\| = \sqrt{(-a)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Théorème de Pythagore: $c^2 = a^2+b^2$.

Angle: Soient v, w des vecteurs non nuls dans un espace euclidien E.

Cauchy Schwarz: $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|$

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1$$

déf. L'angle (non orienté) entre v et w est

$$\theta(v,w) = \arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right).$$

Exemple: 1) L'angle entre deux vecteurs est 0 ssi

$$\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\| \overset{CS}{\Longrightarrow} w = \lambda v$$
$$\| \qquad\qquad$$
$$\lambda \langle v,v\rangle^2 \Longrightarrow \lambda \geq 0.$$

$\xrightarrow{v}\xrightarrow{\lambda v = w}$

2) L'angle est π si et seulement

$$-\langle v,w\rangle = \|v\|\,\|w\| \overset{CS}{\Longrightarrow} w = \lambda v$$
$$\| \qquad\qquad$$
$$-\lambda\,\|v\|^2 \Longrightarrow \lambda < 0$$

$\xleftarrow{\lambda v = w}\cdot\xrightarrow{v}$

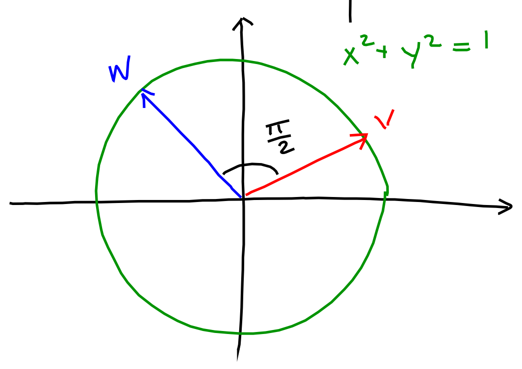
3) L'angle est $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = 0 \Longleftrightarrow \langle v,w\rangle = 0.$$

i.e. v, w orthogonaux.

Rmq: Une base orthonormée est une famille de vecteurs de longueurs 1 et qui deux à deux forment des angles de $\frac{\pi}{2}$.

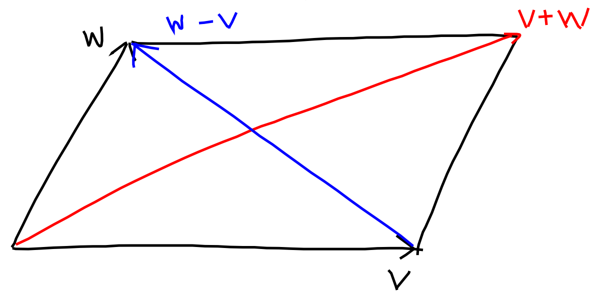
Dans $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard



$$v = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$
$$w = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Formule du parallélogramme:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$



$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle.$$
$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle.$$

On obtient la formule en sommant ces égalités. $\square$

Théorème de Pythagore: Soient $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs deux à deux orthogonaux. Alors,

$$\|v_1+\dots+v_n\|^2 = \|v_1\|^2+\dots+\|v_n\|^2.$$

démo. $\|v_1+\dots+v_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2 + \cancel{\sum_{i\neq j}\underset{\overset{\|}{0}}{\langle v_i,v_j\rangle}}$ $\square$

Orthogonalité

Soit E un espace euclidien de dim. finie n.

déf. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est

$$F^\perp = \{ v \in E \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in F \}.$$

Rmq: $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Si $v \in F \cap F^\perp$, alors $\langle \underset{F^\perp}{\underset{\cap}{v}}, \underset{F}{\underset{\cap}{v}} \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ □

Lemme: Soit $x \in E$. Il existe un unique vecteur $p(x) \in F$ t.q. $x - p(x) \in F^\perp$.

De plus, si $v_1, \dots, v_d$ est une base orthonormée de F, on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

démo. • $p(x) \in F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_d)$.

• $x - p(x) \in F^\perp$. Soit $y \in F$. On écrit

$y = y_1 v_1 + \dots + y_d v_d$

$$\langle x - p(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle p(x), y \rangle = 0.$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle y_i$$

$$\langle p(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle y_i.$$

$$\langle v_i, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} \overbrace{\langle v_i, v_k \rangle}^{\substack{0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k}} y_k = y_i$$

$\Longrightarrow x - p(x) \in F^\perp$.

Soit $y \in F$ t.q. $x - y \in F^\perp$. Alors

$$p(x) + (x - p(x)) = x = y + (x - y)$$

$$\underbrace{\underbrace{p(x)}_{F} - \underbrace{y}_{F}}_{F} = \underbrace{\underbrace{(x-y)}_{F^\perp} - \underbrace{(x - p(x))}_{F^\perp}}_{F^\perp} \in F \cap F^\perp = \{0\}$$

$$\Downarrow$$

$$p(x) = y. \quad \square$$