Rappel: espace euclidien

$\quad\quad\quad\quad\parallel$

espace vectoriel + $\overbrace{\text{une forme quadratique}}^{\text{produit scalaire } \langle x,y\rangle}$ définie positive

$\quad\quad E$

norme = "longueur d'un vecteur" = $\sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\|x\|$

Cauchy-Schwarz: $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$

$$\iff |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Orthogonal: $F \subseteq E$ sous-espace vectoriel

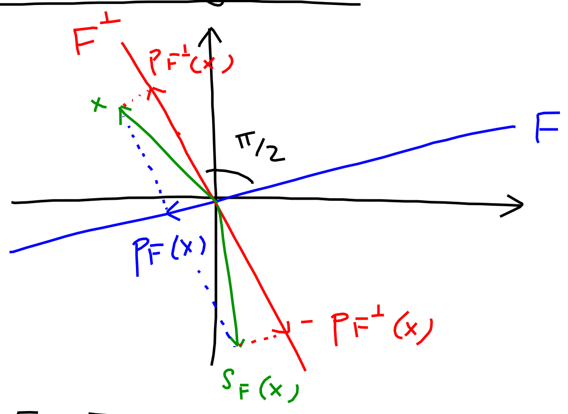
(dim E finie) $F^{\perp} = \{ v \in E \mid \langle v,w\rangle = 0 \ \forall w \in F \}$.

Projection orthogonale: $x \in E$ s'écrit de manière unique comme

$$x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{p_{F^{\perp}}(x)}_{\in F^{\perp}}$$

L'application $p_F : E \longrightarrow F$ est linéaire et appelée projection orthogonale.

Symétrie orthogonale



déf. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \to E$

$$s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$$

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \qquad = x - 2p_{F^\perp}(x) = 2p_F(x) - x.$$

Exemple: $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard.

$$H = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \overbrace{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}^{\langle x, a\rangle} = 0 \}.$$

$$H^\perp = \mathrm{Vect}(a) \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$p_{H^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \cdot \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

$$s_H(x) = x - 2p_{H^\perp}(x) = x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

Propriétés: 1) $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$, $\mathrm{Ker}(p_F - id) = F$.

2) $\mathrm{Ker}(s_F - id) = F$, $\mathrm{Ker}(s_F + id) = F^\perp$.

démo 1) $x \in \mathrm{Ker}(p_F) \iff p_F(x) = 0$

$$\iff x = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \in F^\perp.$$

$x \in \mathrm{Ker}(p_F - id) \iff (p_F - id)(x) = 0 \iff p_F(x) = x.$

$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \qquad \iff p_{F^\perp}(x) = 0$

$$\iff x \in (F^\perp)^\perp = F.$$

2) Exo. $\square$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

E = espace euclidien

$v_1, \dots, v_n \in E$ vecteurs linéairement indépendants. But: "rendre" $v_1, \dots, v_n$ orthonormée.

Prop. Il existe une unique famille orthonormée $w_1, \dots, w_n \in E$ t.q.

1) pour $k = 1, \dots, n$, $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k)$.
2) $\langle v_k, w_k \rangle > 0$.

démo. (Existence) Par récurrence sur k.

$k=1$: $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.
1) $\mathrm{Vect}(v_1) = \mathrm{Vect}(w_1)$
2) $\langle v_1, w_1 \rangle = \frac{\langle v_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|} = \|v_1\| > 0$

Supposons d'avoir défini $w_1, \dots, w_k$ avec les propriétés 1) et 2). On va construire w_{k+1}.

$$F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) \overset{\text{hyp. réc.}}{=} \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k).$$

$$\boxed{\tilde{v}_{k+1} = v_{k+1} - P_{F_k}(v_{k+1})} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, w_i \rangle w_i.$$

$$\tilde{v}_{k+1} = P_{F_k^\perp}(v_{k+1}) \in F_k^\perp$$

$$w_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}.$$ Puisque $\downarrow$, $w_{k+1} \in F_k^\perp$.

$w_i \in F_k \implies \langle w_i, w_{k+1} \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k.$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ par hyp récurrence et déf de w_{k+1}.

$\implies w_1, \dots, w_{k+1}$ est orthonormée.

- $w_{k+1} \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$
- $v_{k+1} = \underbrace{P_{F_k}(v_{k+1})}_{\in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k)} + \|\tilde{v}_{k+1}\| w_{k+1} \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{k+1})$

$$\langle v_{k+1}, w_{k+1} \rangle = \frac{\langle v_{k+1}, P_{F_k^\perp}(v_{k+1}) \rangle}{\|P_{F_k^\perp}(v_{k+1})\|} = \|P_{F_k^\perp}(v_{k+1})\| > 0. \quad \square$$

$$v_{k+1} = P_{F_k}(v_{k+1}) + P_{F_k^\perp}(v_{k+1})$$

Exemple: 1) $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \left\langle v_2, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, \tilde{v}_2 \rangle = \frac{4 - 2 \cdot 2}{5} = 0$$

$$w_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{\cancel{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'orthonormalisation de v_1, v_2 est

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $E = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 28 - 16 \\ 35 - 32 \\ 42 - 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\tilde{v}}_2}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$$

$$= v_3 - \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_3, \tilde{\tilde{v}}_2 \rangle}{\langle \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\tilde{v}}_2 \rangle} \tilde{\tilde{v}}_2.$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{\overset{25}{\cancel{50}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\overset{6}{\cancel{18}}}{\underset{7}{\cancel{21}}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 49 - 25 - 24 \\ 56 - 50 - 6 \\ 63 - 75 + 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants!!

Isométries

E = espace euclidien.

<u>déf</u>: Une <u>isométrie</u> est une application linéaire $f : E \to E$ t.q. $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

<u>Rmq</u>: 1) Si f est une isométrie, on a

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

2) Si $v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée et f une isométrie, alors $f(v_1), \dots, f(v_n)$ est une base orthonormée

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Lemme</u>: Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Supposons qu'il existe une base orthonormée $v_1, \dots, v_n$ t.q. $f(v_1), \dots, f(v_n)$ est une base orthonormée. Alors est une isométrie.

<u>démo</u>. Soit $x \in E$. On écrit $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Par le théorème de Pythagore

($w_1, \dots, w_r$ deux à deux orthogonaux on a $\|w_1 + \dots + w_r\|^2 = \|w_1\|^2 + \dots + \|w_r\|^2$.)

$$\|x\|^2 = \|x_1 v_1\|^2 + \dots + \|x_n v_n\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$$

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \|x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)\|^2 \\ &= \|x_1 f(v_1)\|^2 + \dots + \|x_n f(v_n)\|^2 \\ &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2. \quad \square \end{aligned}$$

<u>Exemple</u>: $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto Ax$.

$e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée.

f est une isométrie $\Longleftrightarrow$ $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est une base orthonormée

$f(e_i) = Ae_i$ = i-ème colonne de A.

C_i = i-ème colonne de A.

f est une isométrie $\Longleftrightarrow$ $\langle C_i, C_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ ${}^tAA = \mathrm{id}$. ${}^tC_i C_j$ = élément en position ij de ${}^tAA$.

$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = \mathrm{id} \}$ groupe orthogonal.

$O_2(\mathbb{R})$: ${}^tAA = id \implies \det({}^tAA) = \det(id) = 1$

$\phantom{O_2(\mathbb{R}) : {}^tAA = id \implies} \overset{\shortparallel}{\det({}^tA)\det(A)} = \det(A)^2$

$\implies \det(A)^2 = 1 \implies \det(A) = \pm 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}.$$

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ avec $\lambda^2 = 1$.

$A = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$.

$a = \cos\theta$
$b = \sin\theta$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda = 1}$. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$ rotation d'angle θ

exo. $R_\theta R_\omega = R_{\theta+\omega} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\omega) & -\sin(\theta+\omega) \\ \sin(\theta+\omega) & \cos(\theta+\omega) \end{pmatrix}$.

$\overset{\shortparallel}{}$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$