Réduction des applications linéaires

Déterminant

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

$n=1$: $A = (a_{11})$ $\quad \det A = a_{11}$.

$n \geq 2$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \det(A_{i1})\, a_{i1}$

$A_{i1} = (a_{k\ell})_{\substack{k \neq i \\ \ell \geq 2}}$ = matrice obtenue de A en enlevant la i-ème ligne et la $1^{\text{ère}}$ colonne.

Exemple : $n=2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei-fh) - d(bi-ch) + g(bf-ec)$$

$$= aei + cdh + gbf - afh - bdi - ceg.$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Méthode de calcul d'un déterminant

Règle 1 : échanger deux lignes fait changer de signe.

Règle 2 : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} \det(A_{ir})$

Soient $1 \leq r \leq n$

développement en colonne

A_{ir} : matrice obtenue en retirant i-ème ligne r-ème colonne

développement en ligne

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} \det(A_{ri})\, a_{ri}.$$

Règle 3 : Soit A' la matrice obtenue de A en faisant l'opération $L_i \leftarrow c_1L_1 + \cdots + c_nL_n$ $\quad c_i \in \mathbb{R}$.

$$\det(A') = c_i \det(A).$$

si $c_i \neq 0$ $\quad \det(A) = \frac{1}{c_i}\det(A')$

Règle 4 : Soit A'' la matrice obtenue de A en faisant l'opération $c_1C_1 + \cdots + c_nC_n \to C_i$.

$$\det(A'') = c_i \det(A)$$

si $c_i \neq 0$: $\det(A) = \frac{1}{c_i}\det(A'')$.

Règle 5 : Le déterminant est linéaires sur les lignes et sur les colonnes :

$$A = (\lambda C_1 + \lambda' C_1', C_2, \dots, C_n)$$

$$\det A = \lambda \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \lambda' \det(C_1', C_2, \dots, C_n).$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda L_1 + \lambda' L_1' \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \lambda \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \lambda' \det\begin{pmatrix} L_1' \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

En part. $\det(\lambda A) \underset{\substack{\uparrow \\ A \in M_n(\mathbb{R})}}{=} \lambda^n \det(A)$

Règle 6 : Si une colonne ou une ligne est nulle, alors le déterminant est nul. Le déterminant est nul si et seulement si les colonnes sont lin. dépendantes, si et seulement les ligne sont lin. dépendantes.

Règle 7 : $\det({}^tA) = \det(A)$.

Règle 8 : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$C_1 - C_3 \to C_1$
$C_2 - 7C_3 \to C_2$
$C_4 - C_1 \to C_4$

$$= 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$-C_2 \to C_2$
$L_2/2 \to L_2$

$$= -10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_2 - 4C_3 \to C_2}{=} -10 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -10(-18-3) = 210$$

Règle 9 : Si A est inversible $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

$$\det(AA^{-1}) = \det(id) = 1.$$

$$\det(A)\det(A^{-1}) \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Déf. Soit V un espace vectoriel de dim. finie n.

Soit $f : V \to V$ une application linéaire.

$$\det(f) := \det(A)$$

où A est la matrice de f dans une base.

Rmq : Soient $v_1, \dots, v_n$ et $v_1', \dots, v_n'$ des bases de V.

Soient

$A = \mathrm{Mat}(f)$ dans la base $v_1, \dots, v_n$.

$A' =$ ——— $v_1', \dots, v_n'$

P = matrice de passage de $v_1, \dots, v_n$ à $v_1', \dots, v_n'$.

$A' = P^{-1}AP$

$$\det(A') = \cancel{\det P^{-1}} \det A \cancel{\det P} = \det A.$$

Exemples : 1. f est inversible $\Longleftrightarrow \det(f) \neq 0$

2. $\det(id) = 1$.

3. $\det(\lambda\, id) = \lambda^n$

Diagonalisation

$E = \mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
$f : E \to E$ une application linéaire.

Question : A-t-il une base $v_1, \dots, v_n$ de E t.q. la matrice de f est diagonale ?

$$Mat(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{array}$$

Déf : On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour f s'il existe un vecteur non nul $v \in E$ t.q.

$$f(v) = \lambda v.$$

Étant donnée une valeur propre λ, un vecteur propre pour λ est un vecteur $v \in E$ t.q.

$$f(v) = \lambda v.$$

Rmq : $f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff (f - \lambda id)(v) = 0$

$$\iff v \in Ker(f - \lambda id).$$

Def : Étant donnée une valeur propre λ, on pose

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda id)$$

et on l'appelle espace propre associé à λ.

Def : Le polynôme caractéristique de f est

$$P_f(X) = det(X \cdot id - f).$$

Prop. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$.

démo $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre $\iff$ il existe $v \in E$ non nul t.q. $f(v) = \lambda v \iff$ $Ker(f - \lambda id) \neq 0 \iff f - \lambda id$ n'est pas inversible $\iff det(f - \lambda id) = 0$

$$\overset{\shortparallel}{(-1)^n \underbrace{det(\lambda id - f)}_{Pf(\lambda)}}$$