Rappel: $E = \mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie

Soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire.

A-t-il une base $v_1, \dots, v_n$ de E t.q. la matrice de φ dans cette base est diagonale?

déf. Si la réponse est positive, on dit que φ est diagonalisable.

Cela revient à dire que $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

déf. $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre s'il existe $v \in E \setminus \{0\}$ t.q. $\varphi(v) = \lambda v$.

Étant donné une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, un vecteur propre pour λ est un vecteur $v \in E$ t.q. $\varphi(v) = \lambda v$.

Rmq: φ est diagonalisable $\iff$ il existe une base de vecteurs propres.

déf. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre. Alors

$$E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \,\mathrm{id}).$$ espace propre de λ

Rmq: v vecteur propre pour $\lambda \iff v \in E_\lambda$.

Lemme: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes. Alors

$E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ sont en somme directe.

Rmq: φ est diagonalisable $\iff$ il existe une base de valeurs propres $\iff E = \sum_{P_\varphi(\lambda)=0} E_\lambda$

$\underset{\text{Lemme}}{\iff} \dim E = \sum_{P_\varphi(\lambda)=0} \dim E_\lambda$.

démo. $E_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} E_{\lambda_j} \right) = 0$.

$$\overset{v \in}{\lambda_i v} \underset{v \in E_{\lambda_i}}{=} \varphi(v) \underset{v \in \sum E_{\lambda_j}}{=} \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$$

$$v = \sum_{j \neq i} v_j \qquad \underset{v_j \in E_{\lambda_j}}{\varphi(v_j) = \lambda_j v_j}$$

$$\sum_{j \neq i} \lambda_i v_j = \lambda_i v = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$$

$$\implies \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) v_j = 0$$

On a terminé si les espaces vectoriels E_{λ_j} pour $j \neq i$ sont en somme directe. En raisonnant par récurrence on se ramène à montrer l'énoncé pour $r = 2$.

Il suffit de montrer $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = 0$.

$v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v$$

$$\implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0. \quad \square$$

Théorème. Soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire telle que $P_\varphi(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_d)$. Supposons $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Alors φ est diagonalisable.

Rmq: $A \in M_n(\mathbb{R}) \implies \deg P_A(X) = n$.

Parce que,

$$P_A(X) = \det(X \,\mathrm{id} - A) \underset{A = (a_{ij})}{=} \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= X - a_{11} \begin{vmatrix} X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n2} & & X - a_{nn} \end{vmatrix} - \sum a_{i1} \text{ termes de degrés } n-1$$

$$= X^n + \text{termes de degré plus petit}$$

démo du Théorème. $\deg P_\varphi(X) = d = \dim E$.

$$d \geq \dim \underbrace{\left(\sum_{i=1}^d E_{\lambda_i} \right)}_{\overset{\cap}{E}} \underset{\text{somme directe}}{=} \sum_{i=1}^d \dim E_{\lambda_i} \underset{\text{parce que } \lambda_i \text{ valeur propre}}{\geq} \sum_{i=1}^d 1 = d$$

$$\implies \sum_{i=1}^d \dim E_{\lambda_i} = d = \dim E$$

$$\implies \varphi \text{ diagonalisable.} \quad \square$$

Somme directe

V = $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$V_1, \dots, V_r \leq V$ sous-espaces vectoriels.

déf $V_1 + \dots + V_r = \{ v_1 + \dots + v_r \in V \mid v_i \in V_i,\ i = 1, \dots, r \}$.

est la somme de $V_1, \dots, V_r$.

Lemme. Supposons V de dim finie.
Soit $d_i = \dim(V_i)$. Soit

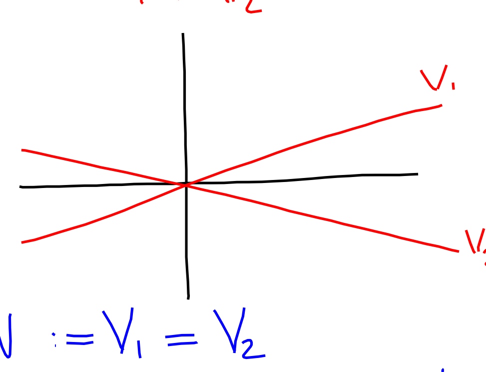
$v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,d_i}$ une base de V_i

Alors $V_1 + \dots + V_r = \mathrm{Vect}\left(v_{i,j} \,\middle|\, \substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,d_i}\right)$.

Exemple. $V = \mathbb{R}^2$ $V_i = \mathrm{Vect}(v_i)$ $i = 1,2$ $v_i \neq 0$.

Deux possibilités :

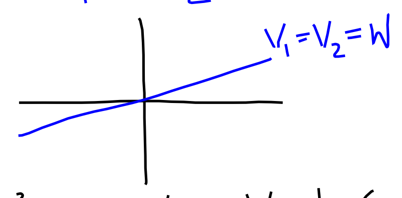
$V_1 \neq V_2$



$V_1 \neq V_2 \iff v_1, v_2$ sont linéairement indép.

Donc v_1, v_2 est une base $V_1 + V_2$. En part, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$.

$W := V_1 = V_2$



$V_1 + V_2 = W$.

$V = \mathbb{R}^3$ $W_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ $W_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$.

$W_1 \cap W_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{3} + \underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{1} = \underbrace{\dim W_1}_{2} + \underbrace{\dim W_2}_{2}.$$

démo du Lemme. On remarque

$$\underset{\left\{ \sum_{i=1}^{r} v_i \,\middle|\, v_i \in V_i \right\}}{\underset{\parallel}{V_1 + \dots + V_r}} = \underset{\left\{ w + v_r \,\middle|\, \substack{w \in V_1 + \dots + V_{r-1} \\ v_r \in V_r} \right\}}{\underset{\parallel}{(V_1 + \dots + V_{r-1}) + V_r}}$$

mais un tel w s'écrit comme $\sum_{i=1}^{r-1} v_i$, $v_i \in V_i$ $i = 1, \dots, r-1$

On se ramène au cas $r = 2$.

$V_i = \mathrm{Vect}(v_{i,j} \mid j = 1, \dots, d_i)$.

On démontre $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}\left(v_{i,j} \,\middle|\, \substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,d_i}\right)$.

($\supseteq$) $x \in \mathrm{Vect}(v_{i,j})$

$$x = \underbrace{\sum_{j=1}^{d_1} \lambda_{1,j} v_{1,j}}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{2,j} v_{2,j}}_{\in V_2} \in V_1 + V_2.$$

($\subseteq$) $x \in V_1 + V_2 \implies x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in V_i$ $i = 1,2$.

$$x_i = \sum_{j=1}^{d_i} \lambda_{ij} v_{ij}.$$

$$\implies x = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{d_i} \lambda_{ij} v_{ij} \implies x \in \mathrm{Vect}\left(v_{ij} \,\middle|\, \substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,d_i}\right)$$ $\square$

Formule des dimensions. Soient $W, W' \leq V$

Alors $\dim W + \dim W' = \dim(W + W') + \dim W \cap W'$

démo. $a = \dim W \cap W'$

$d = \dim W$ $d' = \dim W'$

Soit $x_1, \dots, x_a$ une base de $W \cap W'$.

Soit $x_1, \dots, x_a, v_1, \dots, v_{d-a}$ une base de W

Soit $x_1, \dots, x_a, v_1', \dots, v_{d'-a}'$ une base de W'.

J'affirme que $x_1, \dots, x_a, v_1, \dots, v_{d-a}, v_1', \dots, v_{d'-a}'$ $(*)$
sont linéairement indépendants.

Supposons $(*)$ vraie. Alors

$W + W' = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_a, v_1, \dots, v_{d-a}, v_1', \dots, v_{d'-a}')$.

lin indép

$$\dim W + W' = \cancel{a} + d - \cancel{a} + d' - a$$
$$= d + d' - a = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W'$$

On démontre $(*)$. Supposons

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{d-a} \beta_j v_j + \sum_{k=1}^{d'-a} \gamma_k v_k' = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{d-a} \beta_j v_j}_{\in W} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{d'-a} \gamma_k v_k'}_{\in W'} \in W \cap W'$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\sum \alpha_i x_i + \sum \beta_j v_j = 0$ $\sum_{k=1}^{d'-a} \gamma_k v_k' = 0 \implies \gamma_k = 0$ $\forall k$.

$\Downarrow$

$\alpha_i, \beta_j = 0$ $\forall i, j$ $\implies$ $(*)$ est vraie. $\square$

Rmq. $\dim(W + W') = \dim W + \dim W'$
si et seulement si $W \cap W' = 0$.

déf. $W_1, \dots, W_r \leq V$ sont en somme directe
si $W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = 0$

Lemme. Si $W_1, \dots, W_r$ sont en somme directe,

$$\dim(W_1 + \dots + W_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim(W_i).$$

démo. Par récurrence sur r.

$r = 1$: il n'y a rien à montrer.

$r = 2$: $W_1 \cap W_2 = 0 \underset{\text{Formule des dimensions}}{\implies} \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

Pour $r > 2$:

$$\dim(W_1 + \dots + W_r) = \dim(\underbrace{(W_1 + \dots + W_{r-1})}_{V'} + W_r)$$

$V' \cap W_r = 0$ + cas $r = 2$

$$= \dim(W_1 + \dots + W_{r-1}) + \dim(W_r)$$

hyp. récurrence

$$= \sum_{i=1}^{r-1} \dim(W_i) + \dim(W_r)$$ $\square$