COURBES ELLIPTIQUES COMPLEXES

On travaille sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Fonctions elliptiques

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau.

Définition 1.1. Une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est *elliptique* si, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z+\lambda) = f(z)$.

Exercice 1.2 ([Sil86, VI, Proposition 2.1])**.** Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fonction elliptique. Si f est sans pôle, elle est constante.

Définition 1.3. Soit f est une fonction elliptique. Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $x \in \mathbb{C}/\Lambda$ sa classe de congruence. On pose

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_x(f) &:= \operatorname{ord}_z(f) = \text{ordre d'annulation de } f \text{ en } z, \\ \operatorname{res}_x(f) &:= \operatorname{res}_z(f) = \text{residu de } f \text{ en } z. \end{aligned}$$

(On remarque que ces deux quantités ne dépendent pas du représentant choisi.)

Exercice 1.4 ([Sil86, VI, Theorem 2.2])**.** Soit f une fonction elliptique. Montrer les relations suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{res}_x(f) = 0.$

(2) $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{ord}_x(f) = 0.$

(3) $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{ord}_x(f)x \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$

(Dans (3), le membre de gauche est bien défini modulo Λ.)

Définition 1.5. Le *degré* d'une fonction elliptique non nulle est

$$\deg(f) = -\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \min\{0, \operatorname{ord}_x(f)\}.$$

Exercice 1.6 ([Sil86, VI, Corollary 2.3])**.** Une fonction elliptique non constante a degré au moins 2.

Exercice 1.7 ([Sil86, VI, Theorem 3.1])**.** Soit Λ un réseau.

(1) Soit $k \geqslant 3$ un entier. Montrer que la série $\sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}$ converge normalement. Soit G_k la somme de cette série.

(2) Montrer que $G_k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$ impair.

(3) Soit $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$. Montrer que la série

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2},$$

converge normalement et uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$.

Soit $\wp\colon \mathbb{C} \smallsetminus \Lambda \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe ainsi définie.

(4) Montrer que $\wp$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôle d'ordre 2 en tout $\lambda \in \Lambda$.

Définition 1.8. Soit Λ un réseau. La fonction holomorphe $\wp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie ci-dessus est appelée *fonction $\wp$ de Weierstrass.*

Exercice 1.9 ([Sil86, VI, Theorem 3.1])**.** Soit Λ un réseau.

(1) Montrer que $\wp'$ est une fonction elliptique impaire de degré 3.

(2) Déduire que $\wp$ est une fonction elliptique paire de degré 2.

2. Plongement projectif

Exercice 2.1 ([Sil86, VI, Theorem 3.5])**.** Soit Λ un réseau.

(1) La série de Laurent pour $\wp$ en 0 est
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}.$$

(2) Pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$,
$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Exercice 2.2. Soit Λ un réseau. Soit $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ l'application quotient. On muni $X := \mathbb{C}/\Lambda$ de la famille de cartes suivantes. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts $V \subseteq \mathbb{C}$ tel que $\pi_{|V}\colon V \to \pi(V)$ est bijectif. Pour $V \in \mathcal{V}$, on pose $\varphi_V := (\pi_{|V})^{-1}\colon \pi(V) \to V$.

(1) Montrer que la famille de cartes $\mathcal{A} = \{\varphi_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ est un atlas holomorphe sur X.

On muni X de la structure de surface de Riemann correspondante.

(2) Montrer qu'une fonction elliptique $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définit une fonction holomorphe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

(3) De manière réciproque, si $g\colon X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe et qui n'est pas identiquement égalé à ∞, la fonction composée $g \circ \pi$ est une fonction elliptique.

(4) En déduire une autre preuve de la relation (2) de l'exercice 1.4.

Exercice 2.3 ([Sil86, VI, Proposition 3.6])**.** On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} i\colon X \smallsetminus \{[0]\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & [1 : \wp(z) : \wp'(z)]\,. \end{array}$$

(1) Montrer que i s'étend en une application holomorphe $i\colon X \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(2) Montre que i défini un biholomorphisme de X avec la courbe plane $E \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'équation homogène
$$E : \qquad x_0x_2^2 = 4x_1^3 - g_2x_0^2x_1 - g_3x_0^3,$$
où $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$.

Exercice 2.4. Soit $[0]$ la classe de 0 dans $X := \mathbb{C}/\Lambda$. Soit A le diviseur $[0]$. Soit $d \in \mathbb{Z}$. Soit
$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(dA)) = \{f\colon X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : f \text{ holomorphe}, f \neq 0, \mathrm{div}(f) + dA \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$
Montrer que :

(1) $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(dA)) = 0$ si $d < 0$.

(2) $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$.

(3) $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(A)) = \mathbb{C}$.

(4) Pour $d \geqslant 2$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(dA))$ est engendré par les fonctions
$$1, \wp, \wp^2, \ldots, \wp^{\lfloor d/2\rfloor}, \wp', \wp\wp', \ldots, \wp^{\lfloor (d-3)/2\rfloor}\wp'.$$

3. Loi de groupe

La surface de Riemann $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est un groupe. Il s'agit en fait d'un groupe de Lie complexe.

Exercice 3.1. Soient $z_1, z_2 \neq 0$ tel que $z_1 + z_2 \neq 0$ dans X.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $\wp(z_i) + a\wp'(z_i) = b$ pour $i = 1, 2$. Montrer que la fonction $f(z) := \wp(z) + a\wp'(z) - b$ s'annule exactement en $z = z_1, z_2, z_1 + z_2$. (Indication : Utiliser la relation (3) de l'exercice 1.4.)

(2) Déduire l'identité

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_2) - \wp'(z_1)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)}\right)^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2).$$

(3) Montrer que $(\wp(z_1 + z_2), -\wp'(z_1 + z_2))$ est le troisième point d'intersection de la droite passant par $(\wp(z_i), \wp'(z_i))$ pour $i = 1, 2$ et la cubique d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$.

Références

[Sil86] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986. MR 817210