Rappel: Soit V un espace euclidien de dimension finie.
Soit $W \subseteq V$ un sous espace vectoriel. Alors il existe une unique application $p : V \longrightarrow W$ t.q. $x - p(x) \in W^{\perp}$.

$$W^{\perp} = \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W \}.$$

Cor: Tout $x \in V$ s'écrit de manière unique comme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in W$ et $x_2 \in W^{\perp}$. En particulier, $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.

Cor: $(W^{\perp})^{\perp} = W$

démo. Un vecteur $v \in V$ appartient à $(W^{\perp})^{\perp}$ ssi $\langle v, x \rangle = 0$ pour tout $x \in W^{\perp}$. Si $v \in W$ et $x \in W^{\perp}$, alors $\langle v, x \rangle = 0$.
Ceci montre que $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. D'autre part

$$\begin{aligned} \dim (W^{\perp})^{\perp} &= \dim V - \dim W^{\perp} \\ &= \cancel{\dim V} - (\cancel{\dim V} - \dim W) = \dim W. \end{aligned}$$

Comme W et $(W^{\perp})^{\perp}$ ont la même dimension et $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$, on a $W = (W^{\perp})^{\perp}$. $\square$

Exemple: Projection orthogonale sur un hyperplan

Rmq: Soit $p_W : V \to W$ la projection orthogonale sur W.
$p_{W^{\perp}} : V \to W^{\perp}$ ______ $W^{\perp}$.

Alors $p_{W^{\perp}}(x) = x - p_W(x)$.

C'est clair: en effet, par définition $x - p_W(x) \in W^{\perp}$ et $\underbrace{p_W(x)}_{= x - (x - p_W(x))} \in W = (W^{\perp})^{\perp}$. Par unicité de $p_{W^{\perp}}$, on a

$$p_{W^{\perp}}(x) = x - p_W(x).$$

Rappel: Si $w_1, \dots, w_d$ est une orthonormée de W,

$$p_W(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, w_i \rangle w_i.$$

Revenons à l'exemple: $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard. On considère un sous-espace vectoriel $H \subseteq \mathbb{R}^n$ donné par l'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$. (Supposons $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.)

$$\dim H = n-1 \implies \dim H^\perp = n - \dim H = n-(n-1) = 1.$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \langle x, a \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

$$x \in H \implies a \in H^\perp$$

Je veux trouver une base orthonormée de $H^\perp$.

$$v = \frac{a}{\|a\|} \Rightarrow \|v\| = 1 \quad \text{donc } v \in H^\perp$$

et une base orthonormée.

$$P_{H^\perp}(x) = \langle x, v \rangle \cdot v \underset{v = \frac{a}{\|a\|}}{=} \langle x, \frac{a}{\|a\|} \rangle \cdot \frac{a}{\|a\|} \underset{\|a\|^2 = \langle a, a \rangle}{=} \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

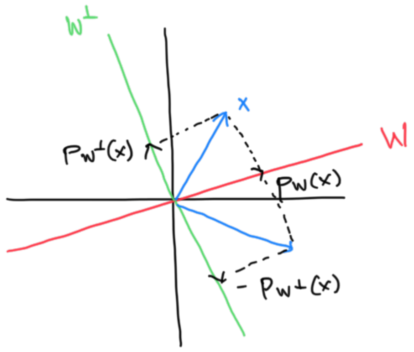
La matrice de $P_{H^\perp}$ dans la base canonique est:

$$P_{H^\perp}(e_i) = \frac{\langle a, e_i \rangle}{\|a\|^2} a \underset{\langle a, e_i \rangle = a_i}{=} \frac{a_i}{\|a\|^2} a. = \frac{1}{\|a\|^2} \begin{pmatrix} a_i a_1 \\ a_i a_2 \\ \vdots \\ a_i a_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Mat}(P_{H^\perp}) = \frac{1}{\|a\|^2} \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_2 a_1 & \cdots & a_n a_1 \\ a_1 a_2 & a_2 a_2 & \cdots & a_n a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & a_2 a_n & \cdots & a_n a_n \end{pmatrix}$$

$$P_H(x) = x - P_{H^\perp}(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a.$$

Symétrie orthogonale



déf: Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit $W \subseteq V$ un sous espace vectoriel. La symétrie orthogonale par rapport à W est

$$S_W(x) = P_W(x) - P_{W^\perp}(x)$$

$$\underset{P_{W^\perp}(x) = x - P_W(x)}{=} 2 P_W(x) - x = x - 2 P_{W^\perp}(x)$$

Exemples: 1) $W = \{0\}$, P_W est l'application nulle donc

$$S_W(x) = -x \qquad (\text{symétrie centrale}).$$

2) $H = \{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard.

2)

$$p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

$$\Rightarrow \quad s_H(x) = x - 2\,\frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

3) $W = \mathrm{Vect}(w)$, $w \neq 0$. $\frac{w}{\|w\|}$ est une base orthonormée de W :

$$s_W(x) = 2 \cdot \left\langle x, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle \cdot \frac{w}{\|w\|} - x$$

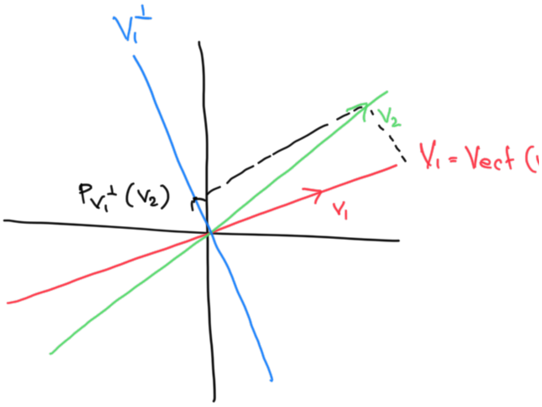
$$= 2 \cdot \frac{\langle x, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w - x.$$

Procédé de Gram-Schmidt

But : " Transformer " une base en une base orthonormée.

Exemple : Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ une base. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard.

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} \longrightarrow \|w_1\| = 1.$$



$$V_1^\perp \ni \tilde{v}_2 = P_{V_1^\perp}(v_2)$$

$$= v_2 - P_{V_1}(v_2) = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1$$

w_1 est une base orthonormée de V_1

$$= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\, v_1.$$

$$w_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}.$$

$\langle w_1, w_2\rangle = 0$ car $w_2 \in V_1^\perp = \mathrm{Vect}(w_1)^\perp$

$\|w_1\| = \|w_2\| = 1$.

$\longrightarrow$ w_1, w_2 forment une base orthonormée.

Def. Soit V un espace euclidien. Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs linéairement indépendants. Pour $k = 1, \dots, n$ on pose

$$V_k = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) \qquad \dim V_k = k$$

$$\tilde{v}_k = v_k - P_{V_{k-1}}(v_k) \qquad V_0 = \{0\}$$

$$w_k = \frac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}.$$

Prop : Avec les notations ci-dessus, $w_1, \dots, w_n$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel V_n. De plus :

1) $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_k) = V_k = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$

2) $\langle w_k, v_k \rangle > 0$.

La famille de vecteurs $w_1, \dots, w_n$ est l'unique qui satisfait des telles propriétés.

<u>démo.</u> On procède par récurrence sur n.

<u>$n=1$</u> : c'est clair. $\tilde{v}_1 = v_1 - P_{V_0}(v_1) = v_1$

$V_0 = 0 \Rightarrow P_{V_0}(v_1) = 0$

$$w_1 = \frac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|}.$$

$\mathrm{Vect}(w_1) = \mathrm{Vect}(v_1)$ donc w_1 est une base orthonormée de V_1

et $\langle w_1, v_1 \rangle = \dfrac{\langle v_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|} = \|v_1\| > 0$.

$(n>1)$ En appliquant l'hypothèse de récurrence à $v_1, \dots, v_{n-1}$ on sait que le résultat est vrai pour $w_1, \dots, w_{n-1}$.

$$\tilde{v}_n = v_n - P_{V_{n-1}}(v_n)$$

Par hypothèse de récurrence, $V_{n-1} = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1})$. Donc

$$\langle \tilde{v}_n, w_i \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad 1 \le i, j \le n-1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{hyp}\\ \text{récurrence}\end{array}\right)$$

$$w_n := \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|}. \Longrightarrow \langle w_n, w_i \rangle = \frac{1}{\|\tilde{v}_n\|} \langle \tilde{v}_n, w_i \rangle = 0 \quad i \neq n$$

$$\langle w_n, w_n \rangle = \frac{\langle \tilde{v}_n, \tilde{v}_n \rangle}{\|\tilde{v}_n\|^2} = 1.$$

On trouve que $w_1, \dots, w_n$ est une base orthonormée. De plus

$$\tilde{v}_n = v_n - P_{V_{n-1}}(v_n) \underset{\uparrow}{=} v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i.$$

$w_1, \dots, w_{n-1}$ est une base orthonormée de V_{n-1}

$$\Longrightarrow w_n, \tilde{v}_n \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1}, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = V_n.$$

D'autre part $w_1, \dots, w_n$ sont lin. indép., donc

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n) \subseteq V_n \\ \text{et } \dim \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n) = n = \dim V_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n) = V_n.$$

et dim ...

Il reste à calculer $\langle w_n, v_n \rangle$.

$$\tilde{v}_n = p_{V_{n-1}^{\perp}}(v_n)$$

$$\langle \tilde{v}_n, \tilde{v}_n \rangle = \langle \tilde{v}_n, v_n - p_{V_{n-1}}(v_n) \rangle$$

$$= \langle \tilde{v}_n, v_n \rangle - \underbrace{\langle \tilde{v}_n, p_{V_{n-1}}(v_n) \rangle}_{=0}.$$

$=0$ car $\tilde{v}_n \in V_{n-1}^{\perp}$, $p_{V_{n-1}}(v_n) \in V_{n-1}$

$$\Longrightarrow \quad \langle \tilde{v}_n, v_n \rangle = \langle \tilde{v}_n, \tilde{v}_n \rangle = \| \tilde{v}_n \|^2 > 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \langle w_n, v_n \rangle = \frac{1}{\|\tilde{v}_n\|} \langle \tilde{v}_n, \tilde{v}_n \rangle = \|\tilde{v}_n\| > 0.$$

L'unicité est laissé en exercice. □

<u>Exemple:</u> $V = \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = v_2 - p_{v_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$$

$$= v_2 - \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{11}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} 15 - 11 \\ 20 - 22 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En effet la base $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthonormée.

<u>Isométries</u>

Soit V un espace euclidien.

<u>Def:</u> Une application linéaire $\varphi : V \to V$ est une isométrie si

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

<u>Rmq:</u> Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ pour tout $v, w \in V$;

2) $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in V$.

démo 1) $\Rightarrow$ 2) Il suffit de prendre $v = w$:

$$\underbrace{\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle}_{\|\varphi(v)\|^2} = \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Par les formules de polarisation

$$2\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \|\underbrace{\varphi(v)+\varphi(w)}_{\varphi(v+w)}\|^2 - \|\varphi(v)\|^2 - \|\varphi(w)\|^2$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\|\qquad\qquad\qquad\|\qquad\qquad\|$$

$$2\langle v, w \rangle = \|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \qquad \square$$

Prop. Soit $v_1, \dots, v_n$ une base orthonormée de V. Soit $\varphi : V \to V$ une application linéaire. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) φ est une isométrie ;

2) $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ est une base orthonormée.

démo. 1) $\Rightarrow$ 2) Si on suppose que φ est une isométrie, on a

$$\langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \text{ est une base orthonormée.}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons que $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ soit une base orthonormée.

Soient $x, y \in V$. On écrit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(v_i) \xrightarrow{\text{Pythagore}} \|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \text{ est orthonorm}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\varphi(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in V$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi \text{ est une isométrie} \qquad \square$$

Groupe orthogonal

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et soit A sa matrice dans la base canonique. D'après la Proposition précédente, pour que

φ soit une isométrie, il faut et il suffit que

$$\underset{\underset{Ae_1}{\parallel}}{\varphi(e_1)}, \dots, \underset{\underset{Ae_n}{\parallel}}{\varphi(e_n)} \quad \text{soit une base orthonormée.}$$

Ae_i = i-ème colonne de A.

Cela revient à dire que φ est une isométrie ssi les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit $v_i = Ae_i$.

$$^tAA = \begin{pmatrix} ^tv_1 \\ ^tv_2 \\ \vdots \\ ^tv_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \dots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ forment une base orthonormée ssi

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

$$\iff \quad ^tAA = id.$$

<u>Déf</u>: Une $A \in M_n(\mathbb{R})$ est <u>orthogonale</u> si $^tAA = id$.

<u>Rmq</u>: Une matrice est orthogonale ssi elle est la matrice (dans la base canonique) d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard.

<u>Exemple</u>: $(n=2)$ On considère les matrices orthogonales

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

La matrice A est orthogonale ssi

$$^tAA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

- $a^2+b^2 = 1 \iff \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = 1.$
- $c^2+d^2 = 1 \iff \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = 1.$
- $ac+bd = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

$\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp$ est de dimension 1 et engendré par $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. De plus

$$1 = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \implies \lambda = \pm 1.$$

$$\implies \quad A = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \{\pm 1\}.$$

$$\det A = \lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda (a^2 + b^2) = \lambda$$

En tout cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q.

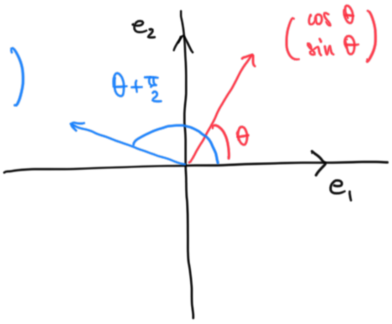
$$\begin{aligned} a &= \cos\theta \\ b &= \sin\theta \end{aligned} \qquad \text{car } a^2 + b^2 = 1.$$

$\boxed{\text{Supposons } \det A = 1}$ Alors

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

<u>Def:</u> R_θ est la rotation d'angle θ.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



La formule de somme pour sin et cos se récrit de la manière suivante

$$R_\theta R_\omega = R_{\theta + \omega} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\omega) & -\sin(\theta+\omega) \\ \sin(\theta+\omega) & \cos(\theta+\omega) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega & \cdots \\ \sin\theta\cos\omega + \cos\theta\sin\omega & \cdots \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det A = -1}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -1, \quad \operatorname{Tr} A = 0.$$

$$\operatorname{Ker}(A - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$\text{car } b^2 - (a+1)(1-a) = b^2 - (1-a^2) = b^2 + a^2 - 1 = 0.$$

$$\mathrm{Ker}\,(A+id) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -b \\ a+1 \end{pmatrix}$$

car $-b^2 + (a+1)(-a+1) = 1 - a^2 - b^2 = 0.$

$$v = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -b \\ a+1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad (A - id)\, v = 0 \quad \longleftrightarrow \quad Av = v.$$

$$(A + id)\, w = 0 \quad \longleftrightarrow \quad Aw = -w$$

$$\langle v, w \rangle = -b^2 + (a+1)(1-a) = -b^2 - a^2 + 1 = 0.$$

Donc v, w sont orthogonaux. Soit $H = \mathrm{Vect}(v)$. Donc $H^\perp = \mathrm{Vect}(w)$

et on a

$$x = \underbrace{\frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v}_{p_H(x)} + \underbrace{\frac{\langle x, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w}_{p_{H^\perp}(x)}.$$

$$Ax = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \underbrace{Av}_{= v} + \frac{\langle x, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \underbrace{Aw}_{-w}$$

$$= p_H(x) - p_{H^\perp}(x)$$

Ceci dit que A est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à H.