<u>Rappel</u>: Soit V un espace vectoriel $_{\mathbb{R}}$. Un <u>produit scalaire</u> sur V est une application bilinéaire symétrique $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie positive, $v \in V \setminus \{0\} \Rightarrow \varphi(v, v) > 0$.

Si c'est le cas on écrit

$$\langle v, w \rangle := \varphi(v, w)$$
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- <u>Base orthonormée</u> : On suppose $\dim V = n < +\infty$.

Une base $v_1, \ldots, v_n$ de V est <u>orthonormée</u>

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j. \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Il existe toujours des bases orthonormées.

- <u>Cauchy-Schwarz</u>: $v, w \in V$. Alors

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

avec égalité <u>ssi</u> v, w sont colinéaires.

- <u>Norme</u>: L'application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ satisfait aux propriétés suivantes:

(i) $\|v\| \geq 0$ avec égalité <u>ssi</u> $v = 0$;

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$;

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $v, w \in V$

(inégalité triangulaire).

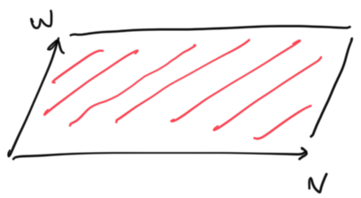
On pense à la norme d'un vecteur comme

à sa "longueur".

def. Soit V un espace euclidien, i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soient $v, w \in V$ des vecteurs linéairement indépendants et soit e_1, e_2 une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par v, w.

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2$$
$$w = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

L'aire du parallélogramme tracé par v, w



est

$$\text{aire}(v,w) := |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Lemme: L'aire ne dépend de la base choisie.

démo. Soient e_1, e_2 et e_1', e_2' des bases orthonormées de $E = \text{Vect}(v,w)$. Soit P la matrice de passage de e_1, e_2 à e_1', e_2'.

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1' e_1' + x_2' e_2'$$
$$w = y_1 e_1 + y_2 e_2 = y_1' e_1' + y_2' e_2'$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \left[P \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det P \cdot \det \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix}$$

Il s'agit de montrer que $|\det P| = 1$.

Rmq: Si $v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée d'un espace euclidien V, et $x \in V$ on a

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$\langle x, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}} = x_i.$$

$$e_1' = \langle e_1, e_1' \rangle e_1 + \langle e_2, e_1' \rangle e_2$$

$$e_2' = \langle e_1, e_2' \rangle e_1 + \langle e_2, e_2' \rangle e_2.$$

$$P = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1' \rangle = a & \langle e_1, e_2' \rangle = c \\ \langle e_2, e_1' \rangle = b & \langle e_2, e_2' \rangle = d \end{pmatrix}.$$

e_1, e_2 orthonormée

e_1', e_2' orthonormée $\Longrightarrow$

$$\langle e_i', e_j' \rangle = \langle \langle e_1, e_i' \rangle e_1 + \langle e_2, e_i' \rangle e_2 , \langle e_1, e_j' \rangle e_1 + \langle e_2, e_j' \rangle e_2 \rangle$$

$$= \langle e_1, e_i' \rangle \langle e_1, e_j' \rangle + \langle e_2, e_i' \rangle \langle e_2, e_j' \rangle$$

$$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les relations que je viens d'écrire sont

$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = 1$ pour le produit scalaire standard scalaire standard

$i=j=1 \qquad a^2+b^2=1. \longrightarrow$

$i=j=2 \qquad c^2+d^2=1. \longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\| = 1.$

$i=1,\ j=2 \qquad ac+bd=0. \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont orthogona[ux]

pour les produit scalaire standard

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\|}_{1} = |\lambda| \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|}_{1}$$

$\longrightarrow |\lambda| = 1.$

$\longrightarrow \lambda = \pm 1.$

$$\det P = \det \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{(a^2+b^2)}_{1} = \lambda.$$

et on vient de voir que $|\lambda| = 1$. $\square$

Prop. Soient $v, w \in V$ des vecteurs linéairement indép.

$$\text{aire}(v,w)^2 + \langle v,w\rangle^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

démo. Soit e_1, e_2 une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(v,w)$.

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$w = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

$$\langle v,w\rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2,\ y_1 e_1 + y_2 e_2\rangle$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\|v\|^2 = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2,\ x_1 e_1 + x_2 e_2\rangle = x_1^2 + x_2^2$$

$$\|w\|^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

$\|v\|^2 + \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2$ (≥ 0 par Cauchy-Schwarz)

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) = \cancel{x_1^2 y_1^2} + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \cancel{x_2^2 y_2^2}$$

$$-\left(\cancel{x_1^2 y_1^2} + \cancel{x_2^2 y_2^2} + 2 x_1 x_2 y_1 y_2 \right)$$

$$= x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = \text{aire}(v,w)^2 . \qquad \square$$

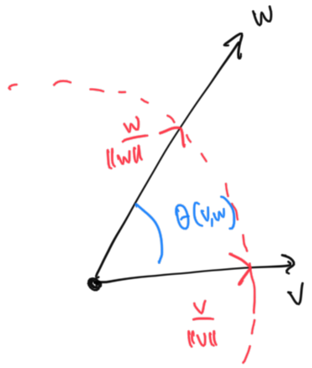
<u>def:</u> Soit $v, w \in V$ des vecteurs d'un espace euclidien.

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|} \in [-1, 1] \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

L'angle non orienté entre v et w est

$$\arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right) =: \theta(v,w).$$

<u>Rmq:</u> $\theta(v,w) = \theta(w,v)$ par symétrie du produit scalaire



$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

<u>Rmq:</u> La formule

$$\langle v,w\rangle^2 + \text{aire}(v,w)^2 = \|v\|^2 \, \|w\|^2$$

devient

$$\left(\langle v,w\rangle \right)^2 + \left(\frac{\text{aire}(v,w)}{\quad} \right)^2 = 1,$$

$$\underbrace{\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)}_{\cos\theta(v,w)} \qquad \left(\frac{\quad}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)$$

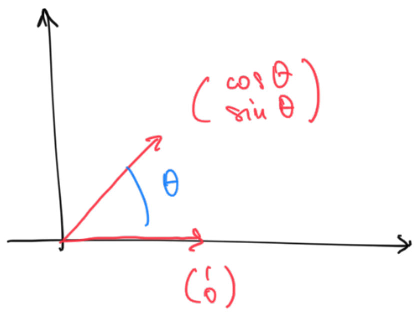
et on sait $\left(\cos\theta(v,w)\right)^2 + \left(\sin\theta(v,w)\right)^2 = 1$.

$$\Longrightarrow \quad |\text{aire}(v,w)| = \|v\|\,\|w\|\,|\sin\theta(v,w)|.$$

En physique : " la norme du produit vectoriel de v et w. "

<u>Exemple</u> : On considère les vecteur

$$v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.$$



$\langle v,w\rangle = \cos\theta$.

$\|v\| = 1 \qquad \|w\|^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$.

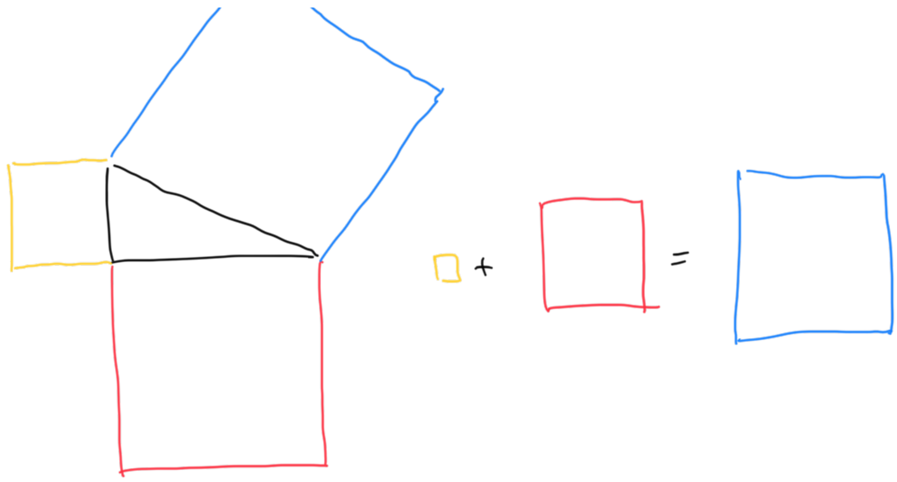
$\longrightarrow$ L'angle non orienté entre v et w est

$$\arccos(\cos\theta) \underset{\text{si } \theta\in[0,\pi]}{=} \theta.$$

<u>Théorème</u> : Soient v, w des vecteurs dans un espace euclidien t.q. $\langle v,w\rangle = 0$ (cela revient à dire que $\theta(v,w) = \frac{\pi}{2}$

Alors

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$



Projection orthogonale :

déf: Soit V un espace euclidien. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est

$$W^\perp := \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W \}$$

" ensemble des vecteurs qui forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec tous les vecteurs de W "

Rmq: $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel. En effet, $v, v' \in W^\perp$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', \underset{W}{\underset{\cap}{w}} \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\substack{0 \\ v \in W^\perp}} + \lambda' \underbrace{\langle v', w \rangle}_{\substack{= \\ 0 \\ v' \in W^\perp}} = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda v + \lambda' v' \in W^\perp.$$

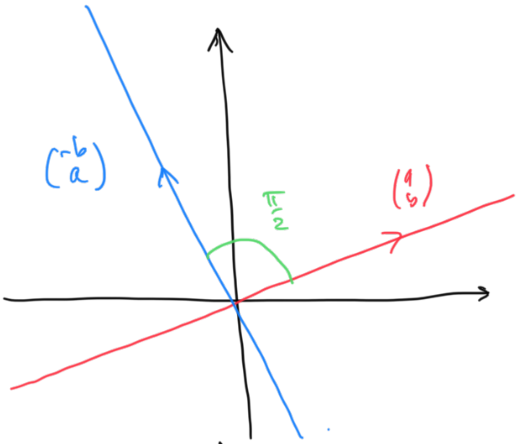
Rmq: $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in W \cap W^\perp$. Alors

$$0 = \langle \underset{W}{\underset{\cap}{v}}, \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{v}} \rangle = \|v\|^2 \Longrightarrow v = 0.$$

Exemple: $V = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard.

$$W = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \right\rangle = -ab + ab = 0.$$

L'orthogonal d'une droite est la droite perpendiculaire.

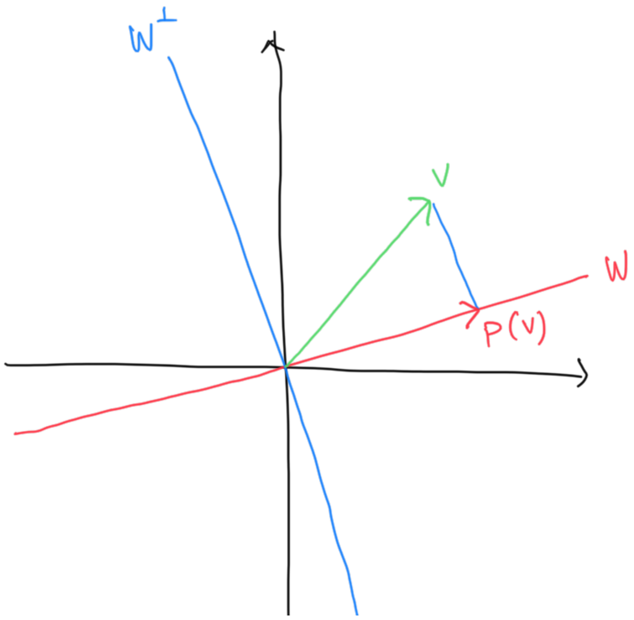
<u>Prop.</u> Soit V un espace euclidien de dimension finie. Soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, 1) pour tout $v \in V$, il existe un unique $p(v) \in W$ t.q. $v - p(v) \in W^{\perp}$.

<u>déf:</u> Le vecteur $p(v)$ est appelé la <u>projection orthogonale</u> de v sur W.

2) L'application $p : V \to W$, $v \mapsto p(v)$ est linéaire.

3) Si $v_1, \dots, v_r$ est une <u>base orthonormée</u> de W, on a

$$p(x) = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle x, v_r \rangle v_r.$$



démo. Soit $v_1, \dots, v_r$ une base orthonormée de W.

On la complète à une base orthonormée de V.

$$\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\in W}, v_{r+1}, \dots, v_n$$

$$< v_i, v_j > = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

$$\Longrightarrow \quad v_{r+1}, \dots, v_n \in W^\perp. \quad (*)$$

On pose pour l'instant

$$\pi(x) = <x, v_1> v_1 + \dots + <x, v_r> v_r. \quad \in W$$

1) Si je montre que $x - \pi(x) \in W^\perp$, j'ai montré l'existence d'un vecteur $\pi(x) \in W$ t.q. $x - \pi(x) \in W^\perp$.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

$$<x, v_i> \underset{\substack{\uparrow \\ v_1, \dots, v_n \\ \text{orthonormée}}}{=} < \sum_{j=1}^n x_j v_j, x_i > = \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{<v_j, v_i>}_{\substack{0 \quad i \neq j \\ 1 \quad i = j}} = x_i$$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^r <x, v_i> v_i}_{\pi(x)} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=r+1}^n <x, v_i> v_i}}_{x - \pi(x)} \in W^\perp$$

$$\Longrightarrow \quad \pi(x) \in W \quad \text{et} \quad x - \pi(x) \in W^\perp.$$

(Unicité) Soient $y, y' \in W$ t.q. $x - y, x - y' \in W^\perp$

$$x = y + (x - y) = y' + (x - y')$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{y - y'}_{\in W} = \underbrace{\underbrace{(x-y')}_{\in W^\perp} - \underbrace{(x-y)}_{\in W^\perp}}_{\in W^\perp} . \qquad \in W \cap W^\perp = \{$$

$$\longrightarrow \quad y = y' .$$

(3) C'est vrai par définition.

(2) p est une application linéaire

$$p(\lambda x + \lambda' x') = \sum_{i=1}^{r} \langle \lambda x + \lambda' x', v_i \rangle v_i$$

$$= \lambda \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \langle x, v_i \rangle v_i \right)}_{p(x)} + \lambda' \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \langle x', v_i \rangle v_i \right)}_{p(x')}$$

$$= \lambda\, p(x) + \lambda'\, p(x') . \qquad \square$$