Déterminant

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il existe une unique application

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det A$$

ayant les propriétés suivantes:

1) det est linéaire sur chaque colonne : soit A la matrice de colonnes $A_1, \dots, A_n$ et soit A' la matrice dont les colonnes sont $A_1, \dots, A_{i-1}, \lambda A_i + \mu B_i, A_{i+1}, \dots, A_n$. Alors

$$\det A' = \lambda \det A + \mu \det B$$ où B est la matrice dont les colonnes sont $A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n$.

2) $\det(\mathrm{id}) = 1$

3) det est une application alternée sur les colonnes :

A = matrice de colonne $A_1, \dots, A_n$

$i < j$ $\quad A' =$ ______________ $A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \dots$

(on a échangé la i-ème et la j-ème colonne)

Alors $\det A' = - \det A$.

Formule : $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où A_{ij} est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ qui s'obtient en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemples:

- $n=1$: $\quad A = (a) \qquad \det(A) = \det(a \cdot \mathrm{id}_1) \underset{\text{Lin.}}{=} a \underbrace{\det(\mathrm{id}_1)}_{1} = a.$

- $n=2$: $\quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & \boxed{d} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} a \det(d) + (-1)^{1+2} c \det(b)$
  $= ad - bc$

- $n=3$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \end{pmatrix}$ [illegible] $(-1)^{1+1}$ [illegible] $\begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}$ [illegible] $(-1)^{1+2}$ [illegible] $\begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix}$ [illegible]

• $n=3$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{e} & \boxed{f} \\ g & \boxed{h} & \boxed{i} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$

$+ (-1)^{1+3} c \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$

$= \underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh} - \underline{afh} - \underline{bdi} - \underline{ceg}$

$$\left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ triangulaire supérieure $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ Alors $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Déterminant de la transposée : $\det({}^tA) = \det(A)$.

↳ le déterminant est une application linéaire sur chaque ligne

Calcul du déterminant via l'algorithme de Gauss

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 + 3L_1 \to L_2 \\ L_3 + 5L_1 \to L_3}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 15 & 15 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{lin en} \\ 3^{\text{ème}} \text{ ligne}}}{=} 15 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 - 5L_3 \to L_2}}{=} 15 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{échange} \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{=} -15 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(-4) \cdot 15 = 6$$

Multiplicativité du déterminant : $A, B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Déf: Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi : V \to V$ une application linéaire. On pose

$\dots \det A$

$\det \varphi := \det A$

où A est la matrice de φ dans une base $v_1, \dots, v_n$ de V.

Rmq: La définition ne dépend pas de la base choisie : soient $v_1, \dots, v_n$, $v_1', \dots, v_n'$ des bases de V. Soit P la matrice de passage de $v_1, \dots, v_n$ à $v_1', \dots, v_n'$.

A = matrice de φ dans la base $v_1, \dots, v_n$

A' = ———————— $v_1', \dots, v_n'$

$$A' = P^{-1} A P$$

$$\Rightarrow \det(A') = \det(P^{-1} A P) = \underbrace{\det(P^{-1})}_{\det(P)^{-1}} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

Lemme: Si P est une matrice inversible, alors $\det(P) \neq 0$ et $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$

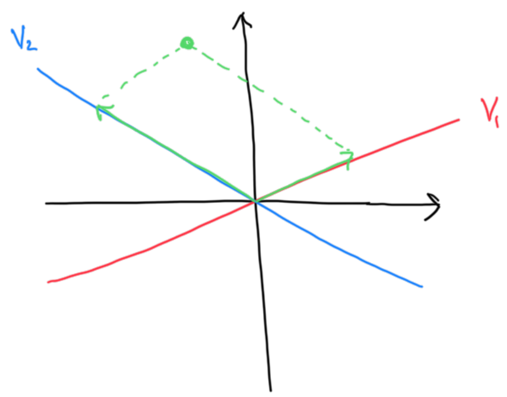
démo. $1 = \det(id) \underset{id = P^{-1}P}{=} \det(P^{-1}P) \underset{mult.}{=} \det(P^{-1}) \det(P)$

$$\Longrightarrow \det(P) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}. \quad \square$$

Diagonalisation

Sommes de sous-espaces vectoriels.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $V_1, \dots, V_n \subseteq V$ des sous-espaces vectoriels. On veut considérer le "plus petit" sous espace vectoriel de V qui contient $V_1, \dots, V_n$. Or, l'union $V_1 \cup \dots \cup V_n$ n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.



Déf. On considère la somme de $V_1, \dots, V_n$:

$$V_1 + \cdots + V_n = \{ v_1 + \cdots + v_n \ : \ v_i \in V_i \}$$

On dit que $V_1, \dots, V_n$ sont en <u>somme directe</u> si, pour tout $i=1,\dots,n$,

$$V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j \Big) = 0.$$

<u>Exercice:</u> La somme $V_1 + \cdots + V_n$ est un sous-espace vectoriel et c'est le plus petit espace vectoriel qui contient $V_1, \dots, V_n$.

<u>Lemme:</u> les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) $V_1, \dots, V_n$ sont en somme directe

2) tout élément $x \in V_1 + \cdots + V_n$ s'écrit de manière <u>unique</u>
$x = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_i \in V_i$.

<u>démo:</u> (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x = v_1 + \cdots + v_n = v_1' + \cdots + v_n'$ avec $v_i, v_i' \in V_i$.

Donc $\underbrace{(v_1' - v_1)}_{w_1} + \underbrace{(v_2' - v_2)}_{w_2} + \cdots + \underbrace{(v_n' - v_n)}_{w_n} = 0 \qquad w_i \in V_i.$

$$V_i \ni w_i = - \sum_{j \neq i} w_j \in \sum_{j \neq i} V_j \implies V_i \cap \Big(\sum_{j\neq i} V_j \Big) = 0$$

$$\implies w_i = 0.$$

$$0 = w_i = v_i' - v_i = 0 \implies v_i' = v_i. \text{ pour tout } i=1,\dots,n.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit x un élément de $V_i \cap \Big(\sum_{j\neq i} V_j \Big)$. On doit montrer que $x = 0$.

$x \in \sum_{j \neq i} V_j \implies$ il existe $v_j \in V_j$ pour $j \neq i$ t.q.
$$x = \sum_{j \neq i} v_j.$$

$$0 = \sum_{j \neq i} \underset{\substack{\cap \\ V_j}}{v_j} + \underbrace{(-x)}_{v_i \in V_i}$$

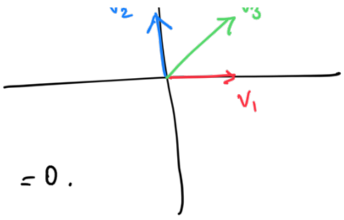
Celle-ci est une écriture de 0 comme $v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_k \in V_k$.

Mais une telle écriture est unique et on a déjà l'écriture
$$0 = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{0} + \cdots + \underset{\substack{\cap \\ V_n}}{0} \implies v_k = 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, n.$$
$$\implies -x = v_i = 0 \implies x = 0 \qquad \square$$

⚠ La condition $V_i \cap \Big(\sum_{j\neq i} V_j \Big) = 0$ n'est pas équivalente à $V_i \cap V_j = 0$ pour $i \neq j$.

<u>Exemple:</u> $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$V_i = \mathrm{Vect}(v_i)$

$V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0.$

Par contre $\quad V_1 + V_2 = \{ \underbrace{x v_1 + y v_2}_{= \binom{x}{y}} : x, y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \quad V_3 \cap (V_1 + V_2) = V_3 \neq 0 \quad \Longrightarrow$ V_1, V_2, V_3 ne sont pas en somme directe.

<u>Exercice</u> : $V_i = \mathrm{vect}(v_{i1}, \dots, v_{id_i})$

$$\Longrightarrow \quad V_1 + \dots + V_n = \mathrm{Vect}(v_{ij}, \; i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, d_i)$$

Attention : la famille $(v_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,d_i}}$ n'est pas forcément libre

(Mieux : elle est libre ssi
1) $v_{i1}, \dots, v_{id_i}$ est une base de V_i pour tout
2) $V_1, \dots, V_n$ sont en somme direct

<u>Formule des dimensions:</u> Si V_1, V_2 sont des sous-espace vectoriel de dimension finie de V, alors

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

<u>démo.</u> Soit $r = \dim(V_1 \cap V_2)$. Soit $x_1, \dots, x_r$ une base de $V_1 \cap V_2$.

On complète les bases :

$x_1, \dots, x_r, v_{r+1}, \dots, v_{d_1}$ base de V_1 $\quad (d_1 = \dim V_1)$

$x_1, \dots, x_r, w_{r+1}, \dots, w_{d_2}$ —— V_2 $\quad (d_2 = \dim V_2)$.

La famille $x_1, \dots, x_r, v_{r+1}, \dots, v_{d_1}, w_{r+1}, \dots, w_{d_2}$ engendre $V_1 + V_2$.
Si on démontre qu'elle est libre, alors on a terminé :

$$\dim(V_1 + V_2) = r + (d_1 - r) + (d_2 - r) = d_1 + d_2 - r$$
$$= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Supposons quelle ne soit pas libre. Il existe une relation linéaire non nulle

$$\underbrace{0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=r+1}^{d_1} \beta_j v_j}_{\in V_1} = \underbrace{\sum_{k=r+1}^{d_2} \gamma_k w_k}_{\in V_2} \quad \in V_1 \cap V_2$$

donc elle doit être combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_r$

(car c'est une base de $V_1 \cap V_2$).

$$\sum_{k=r+1}^{d_2} \gamma_k w_k - \left(\sum_{l=1}^{r} \delta_l x_l \right) = 0.$$ mais $x_1, \dots, x_r, w_{r+1}, \dots, w_{d_2}$ est libre

$$\Longrightarrow \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{d_2} = 0$$

Puisque $x_1, \dots, x_r, v_{r+1}, \dots, v_{d_1}$ est libre, on a $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$ pour tout i, j. $\square$

<u>Cor</u>: Si $V_1 \cap V_2 = 0$ (i.e. s'ils sont en somme directe), alors

$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2.$$

<u>Prop.</u> Soit V un espace vectoriel. Soient $V_1, \dots, V_n$ des sous-espaces vectoriels en somme directe. Alors

$$\dim V_1 + \dots + V_n = \dim V_1 + \dots + \dim V_n.$$

<u>démo</u> : Par récurrence sur n.

$n=1$: il n'y a rien à montrer.

$n \geq 1$: $W = V_1 + \dots + V_{n-1}$. Puisque $V_1, \dots, V_n$ sont en somme directe

$$V_n \cap W = V_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} V_i \right) = 0.$$

$$\xRightarrow[\text{formule des dimensions}]{} \dim (V_n + W) = \dim V_n + \dim W \overset{(*)}{=}$$

Or les sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_{n-1}$ sont en somme directe :

$$V_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} V_j \right) \subseteq V_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} V_j \right) \underset{\substack{V_1, \dots, V_n \text{ en} \\ \text{somme directe.}}}{=} 0$$

$$\xRightarrow[\text{récurrence}]{} \dim W = \dim V_1 + \dots + \dim V_{n-1}$$

$$\overset{(*)}{=} \dim V_n + \dim V_1 + \dots + \dim V_{n-1}. \quad \square$$

<u>Prop.</u> Soit E un espace euclidien. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels, deux à deux orthogonaux, i.e.

$$\langle x, y \rangle = 0 \qquad x \in E_i,\ y \in E_j,\ j \neq i.$$

Alors ces espaces vectoriels sont en somme directe.

<u>démo.</u> L'hypothèse se traduit en disant que, pour $i \neq j$, le ... l'orthogonal de $E_i^{\perp}$.

sous-espace vectoriel E_j est contenu dans l'orthogonal de E_i

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j\neq i} E_j \subseteq E_i^{\perp}$$

$E_i^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel.

$$\Longrightarrow \quad E_i \cap \Big(\sum_{j\neq i} E_j\Big) \subseteq E_i \cap E_i^{\perp} = 0 \quad . \quad \square$$

Valeurs propres & vecteurs propres.

Déf: Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\varphi : V \to V$ une application linéaire. Un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour φ s'il existe un vecteur non nul $v \in V \setminus \{0\}$ t.q

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Un tel vecteur est appelé un vecteur propre pour λ.

Rmq: La condition $v \neq 0$ est essentielle car $\varphi(0) = 0 = \lambda \cdot 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

Lemme: Soit $\varphi : V \to V$ une application linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) λ est une valeur propre ssi $\ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0$;
2) si λ est une valeur propre, alors

$$\ker(\varphi - \lambda \cdot id) = \{ v \in V,\ v \text{ vecteur propre pour } \lambda \}.$$

démo. 1) ($\Longrightarrow$) On suppose λ valeur propre. Par hypothèse, il existe $v \neq 0$ t.q. $\varphi(v) = \lambda v$,

$$0 = \varphi(v) - \lambda v = (\varphi - \lambda \cdot id)v \quad \Longrightarrow \quad \ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0$$

($\Longleftarrow$) Soit $v \in \ker(\varphi - \lambda \cdot id)$ non nul. Alors

$$(\varphi - \lambda id)(v) = \varphi(v) - \lambda v = 0 \quad \to \quad \varphi(v) = \lambda v \ \text{ avec } v \neq 0$$

$\Longrightarrow$ λ valeur propre.

2) Supposons que λ soit une valeur propre.

($\subseteq$) $v \in \ker(\varphi - id) \quad \Longrightarrow \quad 0 = (\varphi - \lambda id)v = \varphi(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow \varphi(v) = \lambda v$

$\Longrightarrow$ v est un vecteur propre pour λ.

($\supseteq$) v vecteur propre pour $\lambda \Longrightarrow \quad \varphi(v) = \lambda v \quad \Rightarrow (\varphi - \lambda id)(v) = 0$

$\Longrightarrow \quad v \in \ker(\varphi - \lambda id)$.

Def: Si λ est une valeur propre pour φ, on appelle l'espace vectoriel $\ker(\varphi - \lambda id) = V_\lambda$ l'espace propre pour φ.

Exemple: 1) $\varphi = id$, donc $\varphi(v) = v$ pour tout $v \in V$.

$\Longrightarrow$ 1 c'est une valeur propre pour φ.

$$\ker(\varphi - id) = \ker(\underbrace{id - id}_{}) = V.$$

2) $\varphi = -id \Rightarrow \varphi(v) = -v$ pour tout^{0} v.

$\Longrightarrow$ -1 est valeur propre et $\ker(\varphi + id) = V$.

Prop. Soit V un espace vectoriel de dim finie. Soit $\varphi: V \to V$ linéaire. Un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre ssi il est racine du polynôme

$$P_\varphi(x) = \det(x \cdot id - \varphi) \in \mathbb{R}[x].$$

Def: le polynôme $P_\varphi(x)$ est appelé le <u>polynôme caractéristique</u> de φ.

démo. On a vu que le déterminant d'une application linéaire $\psi: V \to V$ est non nul ssi ψ est inversible ssi $\ker(\psi) = 0$ (comme $\dim V < +\infty$). Par conséquence

$$\ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0 \iff \det(\varphi - \lambda \cdot id) = 0.$$

$$\det(\varphi - \lambda \cdot id) = (-1)^n \det(\lambda \cdot id - \varphi) = (-1)^n P_\varphi(\lambda)$$

$n = \dim V$ $\square$

Rmq: $A \in M_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

car $\det(\lambda A) = \det((\lambda \cdot id) A) = \det(\lambda \cdot id) \det(A)$

$$\det(\lambda \cdot id) = \begin{vmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

Exemples: $V = \mathbb{R}^2$, $A = Mat(\varphi)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X \cdot id - A = \begin{pmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(X \cdot id - A) = (X-a)(X-d) - bc$$

$$P_A(X) = X^2 - \underbrace{(a+d)}_{Tr(A)} X + \underbrace{ad-bc}_{\det A}$$

$$\Longrightarrow \quad P_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det A.$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2$

  1 est l'unique valeur propre de A.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2-1 = (X-1)(X+1)$

  Les valeurs propre de A sont 1 et -1.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2+1$

  Ici, il n'y a pas de valeurs propres réelles. Les valeurs propres sont des nombres complexes : $i, -i$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1$

val. propres : $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$