Rappel : V = $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$f : V \to V$ application linéaire

- $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre s'il existe $v \neq 0$ t.q. $f(v) = \lambda v$

$$\iff \ker(f - \lambda id) \neq 0$$

$$\underset{\dim V < +\infty}{\iff} \det(f - \lambda\, id) = 0$$

$$\det(f - \lambda\, id) = P_f(\lambda) \quad \text{où} \quad P_f(x) = \det(x \cdot id - f).$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre $\quad \ker(f - \lambda\, id)$ espace propre
$v \in \ker(f - \lambda\, id)$ vecteur propre

Diagonalisation

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

déf : Une application linéaire $f : V \to V$ est diagonalisable s'il existe une base de V composée de vecteurs propres.

Lemme : Soient $f : V \to V$ une application linéaire, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres de f deux à deux distincts. Alors les espaces propres correspondants $V_i = \ker(f - \lambda_i \cdot id)$ sont en somme directe.

démo. Récurrence sur n.

$n=1$: c'est clair.

$n=2$: $v \in V_1 \cap V_2$.

$$\lambda_1 v \underset{v \in V_1}{=} f(v) \underset{v \in V_2}{=} \lambda_2 v \longrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) v = 0$$

$$\xrightarrow[\lambda_1 \neq \lambda_2]{} v = 0.$$

$n \geq 3$: Quitte à renuméroter, il suffit de montrer

$$v \in V_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} V_i \right) = 0.$$

$$v \in V_n \implies f(v_n) = \lambda_n v.$$

$\sum_{i=1}^{n-1} V_i$, $v = v_1 + \dots + v_{n-1}$ $\quad v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n-1$

$v \in \sum_{i=1}$ [illegible] $\Longrightarrow$ [illegible]

$$\Longrightarrow \quad f(v_i) = \lambda_i v_i$$

$$\Longrightarrow \quad f(v) = f(v_1 + \dots + v_{n-1}) = f(v_1) + \dots + f(v_{n-1})$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

$$\lambda_n v = \lambda_n (v_1 + \dots + v_{n-1})$$

$$(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$$

$\in \sum_{i=1}^{n-1} V_i$

$\Downarrow$ $V_1, \dots, V_{n-1}$ sont en somme direct (par récurrence)

$(\lambda_i - \lambda_n) v_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Puisque $\lambda_n \neq \lambda_i$, on a $v_i = 0$. Donc

$$v = v_1 + \dots + v_n = 0 .$$

$\square$

<u>Lemme</u>: Soit $f : V \to V$ linéaire. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1) f est diagonalisable ;
2) $\sum_{P_f(\lambda)=0} \dim \ker (f - \lambda \cdot id) = \dim V$.

<u>démo</u>: D'après le lemme précédent :

$$\sum_{P_f(\lambda)=0} \dim \ker (f - \lambda \cdot id) = \dim \Big(\sum_{P_f(\lambda)=0} \ker (f - \lambda \cdot id) \Big).$$

espaces propres sont en somme directe

1) $\Longrightarrow$ 2) Un vecteur propre pour λ est un élément de $\ker (f - \lambda \cdot id)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f.

Quitte à renuméroter la base on peut supposer

$$v_1, \dots, v_{d_1} \in V_1 = \ker (f - \lambda_1 id)$$

$$v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2} \in V_2 = \ker (f - \lambda_2 \cdot id)$$

$$\vdots$$

$$v_{d_1 + \dots + d_{n-1} + 1}, \dots, v_{\underbrace{d_1 + \dots + d_n}_{= \dim V}} \in V_n = \ker (f - \lambda_n \cdot id).$$

On a aussi : $\dim V_i \geq d_i$

$$\dim V = d_1 + \dots + d_n \leq \sum_{i=1}^{n} \dim V_i \underset{\substack{\uparrow \\ V_i \text{ en} \\ \text{somme directe}}}{=} \dim\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right) \leq \dim V$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \dim V_i = \dim V.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $d_i := \dim V_i$. Soit

$v_{d_1+\dots+d_{i-1}+1}, \dots, v_{d_1+\dots+d_i}$ une base de V_i.

Comme $V_1, \dots, V_n$ sont en somme directe

$v_1, \dots, v_{d_1+\dots+d_n}$ forment une base de $\sum_{i=1}^{n} V_i$

Or $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right) = \dim V \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} V_i = V$

$\longrightarrow v_1, \dots, v_{d_1+\dots+d_n}$ est une base de V

De plus les v_i sont tous des vecteurs propres. $\square$

Interprétation matricielle:

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto Ax.$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $f \iff \exists x \neq 0$ t.q. $Ax = \lambda x$.

f est diagonalisable $\iff \exists$ base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

t.q. $Av_i = \lambda_i v_i = f(v_i)$

Soit B la matrice de f dans la base $v_1, \dots, v_n$.

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{array} \\ \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} \end{array}$$

Si P est la matrice de changement de la base canonique à $v_1, \dots, v_n$ on a

$B = P^{-1} A P$ avec B diagonale.

Prop. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors l'application linéaire $x \mapsto Ax$ est diagonalisable ssi il existe une matrice inversible P t.q.

$$P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$

démo : ($\Longrightarrow$) déjà fait.

($\Longleftarrow$) Soit $v_i = Pe_i$. Puisque P est inversible, les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ forment une base. Par hypothèse

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{array}{c} Be_i = \lambda_i e_i. \\ \shortparallel \\ P^{-1}APe_i \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{PP^{-1}}_{= id} A \underbrace{Pe_i}_{v_i} = \lambda_i \underbrace{Pe_i}_{v_i}$$

$$\longrightarrow \quad A v_i = \lambda_i v_i,$$

Donc v_i est un vecteur propre et $v_1, \dots, v_n$ est une base de vecteurs propres. $\square$

Théorème : Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : V \to V$ une application linéaire. On suppose que le polynôme caractéristique $P_f(X) = \det(X \cdot id - f)$ soit scindé (i.e. toutes ses racines sont réelles) et ses racines sont deux à deux distinctes. Alors f est diagonalisable.

démo. Soit $n = \dim V$. On admet que $\deg P_f(X) = n$.
On sait que P_f a exactement n racines complexes (compte tenu de la multiplicité) : ceci vient du théorème d'Alembert-Gauss qui dit que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine.
L'hypothèse dit que les racines complexes de P_f sont toutes réelles et deux à deux distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$P_f(X) = \det(X \cdot id - f)$$

$$0 = P_f(\lambda_i) = \det(\lambda_i \cdot id - f) \implies \ker(\lambda_i \cdot id - f) \neq 0$$

$$\implies \dim \ker(\lambda_i \cdot id - f) \geq 1.$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(\lambda_i \cdot id - f) \geq \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

$$\shortparallel$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{n} \ker(\lambda_i \cdot id - f) \right) \leq n$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(\lambda_i \cdot id - f) = n.$$

$\implies$ f est diagonalisable. $\square$

Applications auto-adjointes

Prop. Soit E un espace euclidien et soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors, il existe unique application linéaire $f^* : E \to E$ avec la propriété suivante: pour tout $v, w \in ?$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle.$$

De plus, si $v_1, \dots, v_n$ est une base orthonormée de V et A est la matrice de f dans cette base, alors la matrice de f^* est ${}^tA$.

Déf: f^* est appelée l'adjointe de f.

démo. Supposons que f^* existe. On va calculer sa matrice dans une base orthonormée. $v_1, \dots, v_n$.

A = matrice de f.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

$$\langle f(v_j), v_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_{= \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} = a_{kj}.$$

$$\Longrightarrow \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(v_j), v_i \rangle \, v_i.$$

On calcule l'image de v_j par f^*.

$$\langle f^*(v_j), v_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propriété} \\ \text{de } f^*}}{=} \langle v_j, f(v_i) \rangle = \langle f(v_i), v_j \rangle = a_{ji}.$$

Donc la matrice de f^* est $(a_{ji})_{i,j=1,\dots,n} = {}^tA$.

En particulier, si f^* existe elle est forcément unique car on connaît sa matrice.

(Existence). On prend une base orthonormée $v_1, \dots, v_n$ de E.

$A =$ matrice de f.

Soit φ l'application linéaire $E \to E$ dont la matrice dans la base $v_1, \dots, v_n$ est ${}^tA$.

$$E \ni x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$E \ni y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i. \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x, \varphi(y) \rangle = {}^tX({}^tAY) = {}^tX\,{}^tA\,Y$$

$$= {}^t(AX)\,Y = \langle f(x), y \rangle.$$

Donc φ vérifie la propriété qu'on cherchait. $\square$

Exemple: Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard. $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors l'adjointe à $x \mapsto Ax$ est $x \mapsto {}^tAx$.

Exemple: Soit E un espace euclidien de dim finie. Soit p la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel V. Alors

$$p^* = p.$$

$$x = p_V(x) + p_{V^\perp}(x)$$

$$y = p_V(y) + p_{V^\perp}(y).$$

$$< p_V(x), y > = < p_V(x), p_V(y) + p_{V^\perp}(y) >$$

$$= < p_V(x), p_V(y) > + \underbrace{< \underset{\in V}{p_V(x)}, \underset{\in V^\perp}{p_{V^\perp}(y)} >}_{= 0}$$

$$< x, p_V(y) > = < p_V(x), p_V(y) > = < p_V(x), y >.$$

$$\Longrightarrow \quad p_V = p_V^* . \quad \blacksquare$$

Diagonalisation d'applications auto-adjointes

déf: Soit V un espace euclidien de dimension finie. Une application linéaire $f: V \to V$ est dite auto-adjointe si $f^* = f$.

Remarque: 1) Les projections orthogonales sont auto-adjointes

2) Une application est auto-adjointe ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.
Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire standard, ce sont exactement les applications de la forme

$$x \mapsto Ax \quad \text{avec} \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ symétrique } {}^tA = A.$$

Théorème: Soit V un espace euclidien de dim finie. Soit $f: V \to V$ linéaire et autoadjointe. Alors f est diagonalisable.

lemme: Soit $f: V \to V$ autoadjointe. Soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel t.q. $f(W) \subseteq W$. Alors $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.

démo. Soit $x \in W^\perp$. On doit montrer que $f(x)$ appartient à $W^\perp$. Soit $w \in W$:

$$< w, f(x) > = < f(w), x > = 0 \Longrightarrow f(x) \in W^\perp$$

$\langle w, f(x) \rangle$ ...

$\uparrow$ $f = f^*$ $\qquad$ $\uparrow$ $f(W) \subseteq W$, $f(w) \in W$, $x \in W^\perp$ $\qquad \square$

<u>Lemme:</u> Soit $f : V \to V$ autoadjointe. Alors toutes les valeurs propres complexes de f sont réelles. Autrement, toutes les racines complexes de $P_f(X) = \det(X \cdot id - f)$ sont réelles.

<u>Rappel:</u> $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \geq 0$$ avec égalité ssi $x = y = 0 \iff z = 0$.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose
$w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\langle w, z \rangle := \sum_{i=1}^{n} \bar{w_i} z_i = (\bar{w_1}, \dots, \bar{w_n}) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = {}^t\bar{w} z$$

- $\langle \lambda w + \lambda' w', z \rangle = \bar{\lambda} \langle w, z \rangle + \bar{\lambda}' \langle w', z \rangle$
- $\langle w, \mu z + \mu' z' \rangle = \mu \langle w, z \rangle + \mu' \langle w, z' \rangle$
- $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$

En particulier,

$$\langle z, z \rangle = \overline{\langle z, z \rangle} \in \mathbb{R}$$

$$\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z_i} z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$$

avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n = 0 \iff z = (z_1, \dots, z_n) = 0$.

<u>Preuve du Lemme:</u> Quitte à prendre une base orthonormée de V on peut supposer $V = \mathbb{R}^n$ et f est l'application associée

à une matrice symétrique A.

$$P_A(x) = \det(X \cdot id - A) \quad \in \mathbb{R}[X]$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $P_A(\lambda) = 0$. On veut montrer que λ appartient à $\mathbb{R}$.

$$0 = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot id) = 0$$

$$\Rightarrow \ker(A - \lambda \cdot id) \neq 0$$

⚠ $A - \lambda\, id \in M_n(\mathbb{C})$. Donc il existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ t.q.

$$Av = \lambda v.$$

$$\langle Av, v \rangle = {}^t(\overline{Av})\, v = {}^t(\overline{A}\,\overline{v})\, v$$

$$= {}^t\overline{v}\; {}^t\overline{A}\, v \underset{\substack{\uparrow \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \overline{A} = A.}}{=} {}^t\overline{v}\; {}^tA\, v \underset{\substack{\uparrow \\ A = {}^tA}}{=} {}^t\overline{v}\, A v = \langle v, Av \rangle$$

Or $Av = \lambda v$.

$$\overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

<u>démo du Théorème de diagonalisation</u>: On procède par récurrence sur la dimension de V. On pose $n = \dim V$.

<u>$n=1$</u>: c'est clair

<u>$n \geq 2$</u>: D'après le théorème de d'Alembert-Gauss le polynôme $P_f(X) = \det(X \cdot id - f)$ admet une racine complexe λ.

D'après le lemme on sait que $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après le [illegible]

$$\det(\lambda \cdot id - f) = 0 \Longrightarrow \ker(f - \lambda \cdot id) \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$v \neq 0.$$

$$W = \mathrm{Vect}(v) \ni x = \alpha v \Longrightarrow f(x) = \alpha f(v) \underset{\underset{f(v) = \lambda v}{\uparrow}}{=} \alpha \lambda v \in W.$$

D'après l'autre lemme

$$f(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$$

De plus $W^{\perp} \cap W = 0$ et $W^{\perp} + W = V$ $\Rightarrow$ $\dim W^{\perp} = \underbrace{\dim V}_{n} - \underbrace{\dim W}_{1} = n-1.$

Bien entendu, on a

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \text{pour tout } x, y \in W$$

car c'est vrai pour tout $x, y \in V$. Donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, soit $v_1, \ldots, v_{n-1}$ une base de vecteurs propres de $W^{\perp}$. Alors

$v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ est une base de vecteurs propres. $\square$

<u>Remarque:</u> Si f est auto-adjointe, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres. En effet dans l'argument précédent on peut prendre $v_n = \frac{v}{\|v\|}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1}$ une base orthonormée de vecteurs propre de W (par récurrence) qui existe.

<u>Lemme:</u> Si f est autoadjointe, alors les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

<u>démo.</u> Soit λ, μ des valeurs propres distincts.

$$f(v) = \lambda v$$
$$f(w) = \mu w$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle \overset{f = f^*}{=} \langle v, f(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle$$

$$\lambda \langle v, w \rangle \qquad\qquad \mu \langle v, w \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$$

$$\underset{\lambda \neq \mu}{\Longrightarrow} \quad \langle v, w \rangle = 0. \qquad \square$$