Partiel du 19 novembre 2020

Durée : 1h30. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$Q(x,y,z) = x^2 + xy - 2y^2 - 3yz - 2z^2.$$

1. Écrire la matrice A de la forme quadratique Q.
2. Déterminer le rang et le noyau de Q.
3. Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de Q.
5. Déterminer une base orthogonale pour Q.
6. Déterminer la nature géométrique de la conique

$$C : Q(x,y,1) = x^2 + xy - 2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

S'il s'agit d'une ellipse déterminer son centre, s'il s'agit d'une hyperbole trouver ses asymptotes.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W_\lambda : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z-\lambda t = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer des équations cartésiennes pour V.
2. Déterminer des équation paramétriques pour W_λ.
3. Déterminer l'intersection de V et W_λ en fonction de λ.
(Indication : distinguer les cas $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$.)

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. La *trace* d'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ carrée de taille n est la somme de ses coefficients sur la diagonale :

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(A,B) := \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Montrer que l'application $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique. (Indication : on admettra l'identité $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$ pour $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.)

Pour $i,j = 1,\dots,n$ soit E_{ij} la matrice dont l'entrée en position (i,j) est 1 et les autres sont nulles. Les matrices E_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ on a $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}$. Pour $i,j,k,\ell = 1,\dots,n$ on accepte l'égalité :

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Déduire la valeur de $\phi(E_{ij}, E_{k\ell})$.
3. Pour $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ montrer l'identité

$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}a_{ji}.$$

(Indication : écrire $\phi(A, A) = \phi(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}, \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell}E_{k\ell})$ et utiliser la bilinéarité de ϕ.)

4. Déterminer le rang et la signature de ϕ. (Indication : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.)