Partiel du 19 novembre 2020

Durée : 1h30. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$Q(x,y,z) = x^2 + xy - 2y^2 - 3yz - 2z^2.$$

1. Écrire la matrice A de la forme quadratique Q.
2. Déterminer le rang et le noyau de Q.
3. Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de Q.
5. Déterminer une base orthogonale pour Q.
6. Déterminer la nature géométrique de la conique

$$C : Q(x,y,1) = x^2 + xy - 2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

S'il s'agit d'une ellipse déterminer son centre, s'il s'agit d'une hyperbole trouver ses asymptotes.

Solution. (1) La matrice de la forme quadratique Q est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) En faisant l'opération sur les lignes $2L_2 - L_1 \to L_2$ on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme les dernières deux lignes sont linéairement indépendantes, on conclut que le rang de A est 3.

(3) En appliquant la méthode de Gauss en considérant le carré x^2 on obtient :

$$Q(x,y,z) = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 - \tfrac{9}{4}y^2 - 3yz - 2z^2.$$

Or

$$\tfrac{9}{4}y^2 + 3yz + 2z^2 = \tfrac{9}{4}(y^2 + \tfrac{4}{3}yz + \tfrac{8}{9}z^2) = \tfrac{9}{4}((y + \tfrac{2}{3}z)^2 + \tfrac{4}{9}z^2) = \tfrac{9}{4}(y + \tfrac{2}{3}z)^2 + z^2$$

On conclut

$$Q(x,y,z) = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 - \tfrac{9}{4}(y + \tfrac{2}{3}z)^2 - z^2.$$

On consière les formes linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1(x,y,z) &= x + \tfrac{1}{2}y, \\ \ell_2(x,y,z,t) &= y + \tfrac{2}{3}z, \\ \ell_3(x,y,z,t) &= z. \end{aligned}$$

Alors $Q(x,y,z,t) = \ell_1(x,y,z)^2 - \frac{9}{4}\ell_2(x,y,z)^2 - \ell_3(x,y,z)^2$.

(4) La signature est $(1,2)$.

(5) Une base orthogonale est donnée par les colonnes de l'inverse de la matrice P ayant pour lignes les formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthogonale est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6) Le discriminant de la conique C est $\Delta = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Comme la forme quadratique Q a rang 3, il s'agit d'une hyperbole. On cherche des coordonnées X, Y dans lesquelles l'équation de C est de la forme $X^2 - Y^2 = 1$. On commence en appliquant l'algorithme de Gauss à la partie quadratique de l'équation de C :

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 - \tfrac{9}{4}y^2 = x'^2 - \tfrac{9}{4}y'^2$$

où $x' = x + \frac{1}{2}y$ et $y' = y$. Dans les variables x', y' l'équation de C est de la forme

$$x'^2 - \tfrac{9}{4}y'^2 - 3y' - 2 = 0.$$

Or

$$\tfrac{9}{4}y'^2 + 3y' = \tfrac{9}{4}(y' + \tfrac{4}{3}) = \tfrac{9}{4}((y' + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{4}{9}) = \tfrac{9}{4}(y' + \tfrac{2}{3})^2 - 1.$$

Dans les variables $X = x' = x + \frac{1}{2}y$ et $Y = y' + \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3}$ l'équation de C est de la forme $X^2 - \frac{9}{4}Y^2 = 1$. Les asymptotes de C ont equation

$$X + \tfrac{3}{2}Y = (x + \tfrac{1}{2}y) + (\tfrac{3}{2}y + 1) = x + 2y + 1 = 0,$$
$$X - \tfrac{3}{2}Y = (x + \tfrac{1}{2}y) - (\tfrac{3}{2}y + 1) = x - y - 1 = 0.$$

Ceci termine l'exercice. □

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad W_\lambda : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z - \lambda t = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer des équations cartésiennes pour V.
2. Déterminer des équation paramétriques pour W_λ.
3. Déterminer l'intersection de V et W_λ en fonction de λ.
   (Indication : distinguer les cas $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$.)

Solution. (1) L'espace vectoriel V est de dimension 2 dans un espace de dimension 2. On doit trouver 2 équations. Par exemple, les deux suivantes conviennent : $x - y = 0$ et $z - t = 0$.

(2) L'espace vectoriel W_λ est de dimension 2. Une base de W_λ est, par exemple,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve les équations paramétriques suivantes, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \alpha + \lambda\beta \\ y = -\lambda\beta \\ z = -\alpha \\ t = \beta. \end{cases}$$

(3) En utilisant les équations paramétriques de V et les équations cartésiennes de W_λ, l'intersection $V \cap W_\lambda$ est donnée par le système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + (1-\lambda)\beta = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = (\lambda - 1)\beta \\ (2\lambda - 1)\beta = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$ l'intersection est nulle. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ l'intersection est la droite vectorielle dirigée par le vecteur :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci termine l'exercice. □

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. La *trace* d'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ carrée de taille n est la somme de ses coefficients sur la diagonale :

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(A, B) := \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Montrer que l'application $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique. (Indication : on admettra l'identité $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$ pour $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.)

Pour $i, j = 1, \dots, n$ soit E_{ij} la matrice dont l'entrée en position (i, j) est 1 et les autres sont nulles. Les matrices E_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ on a $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$. Pour $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$ on accepte l'égalité :

$$E_{ij} E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Déduire la valeur de $\phi(E_{ij}, E_{k\ell})$.

3. Pour $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ montrer l'identité

$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} a_{ji}.$$

(Indication : écrire $\phi(A, A) = \phi(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}, \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell} E_{k\ell})$ et utiliser la bilinéarité de ϕ.)

4. Déterminer le rang et la signature de ϕ. (Indication : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.)

Solution. (1) Pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ et $A, A', B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda A + \lambda' A', B) &= \mathrm{Tr}((\lambda A + \lambda' A')B) \\ &= \mathrm{Tr}(\lambda AB + \lambda' A'B) \\ &= \lambda \,\mathrm{Tr}(AB) + \lambda' \,\mathrm{Tr}(A'B) \\ &= \lambda \phi(A, B) + \lambda' \phi(A', B). \end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire dans la première variable. Grâce à l'indication,

$$\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = \phi(B, A).$$

L'application ϕ est donc symétrique. Puisque ϕ est symétrique et linéaire dans la deuxième variable, elle est linéaire aussi dans la deuxième variable.

(2) D'après l'identité dans l'énoncé on a

$$\phi(E_{ij}, E_{k\ell}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \ell, k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Par bilinéarité de ϕ,

$$\phi(A, A) = \phi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}, \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell} E_{k\ell}\right) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} a_{ij} a_{k\ell} \phi(E_{ij}, E_{k\ell})$$

D'après (2) on obtient

$$\phi(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} a_{ji}.$$

(4) Pour $1 \le i < j \le n$ on pose $a_{ij} = b_{ij} + b_{ji}$ et $a_{ji} = b_{ij} - b_{ji}$. Pour $i = 1, \dots, n$ on pose $b_{ii} = a_{ii}$. Alors

$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} (b_{ij}^2 - b_{ji}^2).$$

Il en découle que le rang de ϕ est n^2 et la signature est $(\frac{(n+1)n}{2}, \frac{(n-1)n}{2})$. □