Contrôle continu du 3 janvier 2022

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et la matrice

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Dire sans calculs, en énonçant un résultat du cours, pourquoi la matrice A est diagonalisable.
2. Calculer le rang de la matrice A.
3. Calculer le polynôme caractéristique de A.
4. Déterminer une base orthonormée dans laquelle A se diagonalise.
5. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à la matrice A.

Proof. (1) La matrice A est diagonalisable car elle est synétrique.
(2) La matrice a rang 3 car le déterminant est -4.
(3) Le polynôme caractéristique est $\mathrm{P}_\mathrm{A}(x) = (x+1)(x-2)^2$.
(4) Les valeurs propre sont -1 et 2. On calcule l'espace propre $\mathrm{E}_2 = \ker(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{id})$. On a

$$3\mathrm{A} - 6\,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de rang 1 et une base du noyau est $v_2 = e_1 - e_3$ et $w_2 = 2e_2 + e_3$. Pour obtenir une base orthonormée on applique la méthode de Gram-Schmidt:

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \frac{\langle v_2, w_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \tfrac{1}{2}(e_1 + 4e_2 + e_3).$$

Puisque les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et que E_2 est l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par le vecteur $v_{-1} = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, l'espace propre pour la valeur propre -1 est engendré par v_{-1}. Il en découle qu'une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}v_2$, $\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{w}_2$ et $\frac{1}{3}v_{-1}$. □

Exercice 2. On considère la conique d'équation

$$\mathrm{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8y = 0.$$

1. Déterminer l'excentricité de C.
2. Trouver une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{O}(2)$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que la conique C dans les coordonnées

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix} = \mathrm{P}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right].$$

   ait équation $\alpha\mathrm{X}^2 + \beta\mathrm{Y}^2 = \gamma$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ à expliciter.
3. Déterminer les caractéristique géométriques de la conique (centre et axes pour une ellipse, centre et asymptotes pour une hyperbole, axe pour une parabole).

Proof. On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\mathrm{P}_\mathrm{A}(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Il s'agit donc d'une ellipse, avec points réels car le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est -11.

(1) L'excentricité de cette ellipse vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) L'espace propre pour 4 est la droite vectorielle engendrée par $(1,1)$ et l'espace propre pour 2 est celle engendrée par $(1,-1)$. Quitte à renormaliser, on trouve qu'une base orthonormée de vecteurs propres est donnée par

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

En écrivant

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \tfrac{x'}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \tfrac{y'}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x'+y'\\x'-y'\end{pmatrix}$$

on trouve que l'équation de C dans les coordonnées x', y' est

$$4x'^2 + 2y'^2 + \tfrac{8}{\sqrt{2}}x' - \tfrac{8}{\sqrt{2}}y' = 0,$$

et en divisant par 2,

$$2x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' = 0.$$

En complétant les carrés on trouve

$$2(x' + \tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + (y' - \sqrt{2})^2 = 3.$$

Le centre de la conique a coordonnées $(x'_0, y'_0) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ et donc $(x_0, y_0) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. En posant $\mathrm{X} = x' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{Y} = y - \sqrt{2}$ on a finalement

$$2\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 3.$$

Pour trouver la matrice P on remarque tout simplement

$$\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \mathrm{P}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right],$$

où

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

car c'est la matrice d'une symétrie orthogonale.

(3) On a déjà trouvé le centre de l'ellipse. Les axes sont données par les équations $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$, c'est-à-dire $x + y + 1 = 0$ et $x - y + 2 = 0$. $\square$