Partiel du 18 novembre 2021

Durée : 1h30. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{Q}(x,y,z,t) = x^2+4y^2+z^2+t^2+4xy-2xz+2xt-3yz+5yt-3zt.$$

1. Écrire la matrice A de la forme quadratique Q.
2. Déterminer le rang et le noyau de Q.
3. Écrire Q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de Q.
5. On considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation

$$\mathscr{C} : \mathrm{Q}(0,1,z,t) = z^2+t^2-3zt-3z+5t+4=0.$$

   Déterminer le type de la conique $\mathscr{C}$ (ellipse, hyperbole, parabole, etc.). S'il s'agit d'une ellipse, déterminer le centre; s'il s'agit d'une hyperbole, déterminer asymptotes et centre.

Solution. (1) La matrice est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(2) La matrice a rang 4, donc le noyau est nul.

(3) On applique l'algorithme de Gauss:

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(x,y,z,t) &= (x+2y-z+t)^2+yz+yt-zt \\ &= (x+2y-z+t)^2+(y-t)(z+t)+t^2.\end{aligned}$$

On considère les formes linéaires:

$$\begin{aligned}\ell_1(x,y,z,t) &= x+2y-z+t, \\ \ell_2(x,y,z,t) &= \tfrac{1}{2}(y+z), \\ \ell_3(x,y,z,t) &= \tfrac{1}{2}(y-z-2t), \\ \ell_4(x,y,z,t) &= t.\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathrm{Q}(x,y,z,t) = \ell_1(x,y,z,t)^2+\ell_2(x,y,z,t)^2-\ell_3(x,y,z,t)^2+\ell_4(x,y,z,t)^2.$$

(4) D'après la question précédente, la signature est $(3,1)$.

(5) Le discriminant de la conique $\mathscr{C}$ vaut $1-\frac{9}{4}<0$. De plus la forme quadratique $\mathrm{Q}(0,y,z,t)$ a rang 3, donc la conique $\mathscr{C}$ est une hyperbole. En appliquant l'algorithme de Gauss à $\mathrm{Q}(0,0,z,t)$ on trouve

$$z^2+t^2-3zt = (z-\tfrac{3}{2}t)^2-\tfrac{5}{4}t^2.$$

On pose $z'=z-\frac{3}{2}t$ et $t'=t$, de manière que l'équation de $\mathscr{C}$ dans les variables z' et t' est

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(0,1,z,t) &= z'^2-\tfrac{5}{4}t'^2-3z'+\tfrac{1}{2}t'+4 \\ &= (z'-\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{5}{4}(t'-\tfrac{1}{5})^2-\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{20}+4=0.\end{aligned}$$

Finalement, en posant $\mathrm{Z}=z'-\frac{3}{2}$ et $\mathrm{T}=t'-\frac{1}{5}$ on trouve:

$$\mathrm{Z}^2-\tfrac{5}{4}\mathrm{T}^2=-\tfrac{9}{5}.$$

Le centre de $\mathscr{C}$ a équation $\mathrm{Z} = 0$ et $\mathrm{T} = 0$, ce qui revient à $z' = \frac{3}{2}$, $t' = \frac{1}{5}$ ou encore
$$z = \tfrac{3}{2}(1 - \tfrac{1}{5}) = \tfrac{6}{5}, \qquad t = \tfrac{1}{5}.$$
Les asymptotes ont équation $\mathrm{Z} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{T}$, ce qui revient à $z' - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(t' - \frac{1}{5})$, ou encore à
$$z - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} t = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}.$$
Ceci conclut l'exercice. $\square$

Exercice 2. On considère les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$:
$$\ell_1(x, y, z) = x + 2y - z, \qquad \ell_2(x, y, z) = z - x.$$

1. Est-ce que les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes ? Pourquoi ?
2. Déterminer tous les nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels la forme linéaire $\ell_3(x, y, z) = ax + by + cz$ est linéairement indépendante de ℓ_1 et ℓ_2.
3. Pour $a = -1$, $b = 0$ et $c = 2$ trouver l'unique base v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour $i, j = 1, 2, 3$,
$$\ell_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proof. (1) Les formes ℓ_1, ℓ_2 ne sont pas proportionnelles, donc elles sont linéairement indépendantes.

(2) On applique le pivot de Gauss à la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$
En faisant les opérations $\frac{1}{2}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) \to \mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 + a\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_3$ on trouve
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & b & a + c \end{pmatrix}.$$
En faisant l'opération $\mathrm{L}_3 - b\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_3$ on trouve
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a + c \end{pmatrix}.$$
Cette matrice a rang 3 si et seulement si $a + c \neq 0$. Donc les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont linéairement indépendantes si et seulement si $a + c \neq 0$.

(3) On considère la matrice
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Son inverse est
$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
La base cherchée est donnée les colonnes de la matrice P^{-1}. $\square$

Exercice 3. Soient $n \geq 1$ un entier et M une matrice symétrique, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$. Pour des matrices carrées $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
$$\phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) := \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AMB}),$$
où Tr désigne la trace d'une matrice carrée.

1. Montrer que $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.

On considère la forme bilinéaire symétrique $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de matrice M,

$$f(x,y) := {}^t x \mathrm{M} y, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $v_1, \ldots, v_n$ les colonnes de A et $w_1, \ldots, w_n$ les colonnes de B. Montrer l'égalité

$$ {}^t\mathrm{AMB} = \begin{pmatrix} f(v_1,w_1) & f(v_1,w_2) & \cdots & f(v_1,w_n) \\ f(v_2,w_1) & f(v_2,w_2) & \cdots & f(v_2,w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,w_1) & f(v_n,w_2) & \cdots & f(v_n,w_n) \end{pmatrix}.$$

   (Indication: exprimer les lignes de ${}^t\mathrm{A}$ en termes des colonnes de A.)

3. Déduire de la question précédente la formule $\phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = f(v_1,v_1) + \cdots + f(v_n,v_n)$.
4. Montrer que si f est définie positive, alors ϕ est définie positive.[1]
5. Réciproquement, montrer que si ϕ est définie positive, alors f est définie positive.

Proof. (1) On commence par la symétrie. Puisque la trace d'une matrice et de sa transposée coïncident:

$$\phi(\mathrm{B},\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{BMA}) = \mathrm{Tr}({}^t({}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{MB})) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{MB}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AMB}) = \phi(\mathrm{A},\mathrm{B}),$$

où dans l'égalité $(*)$ on a utilisé que la matrice M est symétrique. Pour montrer la bilinéarité, il suffit alors de montrer la linéarité dans la deuxième variable. Puisque ${}^t\mathrm{AM}(\beta\mathrm{B} + \beta'\mathrm{B}') = \beta\,{}^t\mathrm{AMB} + \beta'\,{}^t\mathrm{AMB}'$, par linéarité de la trace on trouve

$$\phi(\mathrm{A}, \beta\mathrm{B} + \beta'\mathrm{B}') = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AM}(\beta\mathrm{B} + \beta'\mathrm{B}')) = \beta\,\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AMB}) + \beta'\,\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AMB}') = \beta\phi(\mathrm{A},\mathrm{B}) + \beta'\phi(\mathrm{A},\mathrm{B}').$$

(2) Les lignes de ${}^t\mathrm{A}$ sont ${}^tv_1, \ldots, {}^tv_n$. Par définition du produit matriciel, l'entrée en position (i,j) de la matrice ${}^t\mathrm{AMB}$ est

$${}^tv_i \mathrm{M} w_j = f(v_i, w_j).$$

(3) Clair.

(4) Supposons f définie positive. Les nombres réels $f(v_i,v_i)$ sont alors tous positifs. Il en découle que $\phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f(v_i,v_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. La dernière condition qui revient à dire que A est nulle.

(5) Étant donné $v \in \mathbb{R}^n$ considère la matrice A dont la première est v et les autres sont nulles. Alors

$$\phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = f(v,v).$$

Si ϕ est définie positive, alors $\phi(\mathrm{A},\mathrm{A}) = f(v,v) \geq 0$ avec égalité si et seulement si A est nulle, ce qui revient à dire que v est nul. □

[1] On rappelle qu'une forme bilinéaire symétrique α sur un espace vectoriel V est *définie positive* si, pour tout $v \in \mathrm{V}$, on a $\alpha(v,v) \geq 0$ et $\alpha(v,v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.