Contrôle continu du 21 octobre 2021

Exercice 1. On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x,y,z,t) = xy - 2xz - xt + 2yz + yt.$$

1. Écrire la matrice A de la forme quadratique q.
2. Déterminer le rang et le noyau de q.
3. Écrire q comme une somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
4. Déterminer la signature de q.
5. Déterminer une base orthogonale pour q.
6. Existe-t-il $v \in \mathbb{R}^4 \setminus \ker q$ tel que $q(v) = 0$? Si oui, en expliciter un.

Solution. (1) La matrice de la forme quadratique q est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Le rang de la matrice A est 3 et le noyau est engendré par $v = (0,0,1,-2)$.
(3) En appliquant l'algorithme de Gauss on trouve

$$q(x,y,z,t) = (x+2z+t)(y-2z-t) + (2z+t)^2.$$

(4) La signature de q est $(2,1)$.
(5) On pose

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= x + 2z + t \\ \phi_1 - \phi_2 &= y - 2z - t \\ \phi_3 &= 2z + t \\ \phi_4 &= t, \end{aligned}$$

d'où $\phi_1 = \frac{1}{2}(x+y)$, $\phi_2 = \frac{1}{2}(x - y + 4z + 2t)$. Il s'agit de calculer l'inverse de la matrice

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthogonale est donnée par les colonnes de cette matrice.
(6) Oui, par exemple les vecteurs de la base canonique. □

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$\mathrm{V}_\lambda := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right), \qquad \mathrm{W}_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} y + t &=& 0, \\ \lambda x - t &=& 0. \end{array} \right.$$

1. Trouver des équations cartésiennes pour V_λ.

2. Trouver des équations paramétriques pour W_λ.
3. Déterminer pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intersection $\mathrm{V}_\lambda \cap \mathrm{W}_\lambda$ est non nulle et, pour chacune de ces valeurs, donner une base de l'intersection $\mathrm{V}_\lambda \cap \mathrm{W}_\lambda$.

Solution. (1) Des équations cartésiennes pour V_λ sont

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ \lambda x + \lambda y - t &= 0. \end{cases}$$

(2) Une base de W_λ est $(1, -\lambda, 0, \lambda)$, $(0, 0, 1, 0)$.

(3) Un vecteur de $\mathbb{R}^4$ appartient à V_λ si et seulement s'il est de la forme $(\alpha, \beta - \alpha, \beta, \lambda\beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^4$. Un tel vecteur appartient à W_λ si et seulement si α et β vérifient les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} -\alpha + (\lambda+1)\beta &= 0 \\ \lambda\alpha + \lambda\beta &= 0. \end{cases}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

a rang ≤ 1 si et seulement $\lambda = 0, -2$, auquel cas elle a rang 1.

Pour $\lambda = 0$, on trouve $\beta = \alpha$, donc une base de $\mathrm{V}_\lambda \cap \mathrm{W}_\lambda$ est $(1, 0, 1, 0)$. Pour $\lambda = -2$, on trouve $\beta = -\alpha$, donc une base de $\mathrm{V}_\lambda \cap \mathrm{W}_\lambda$ est $(1, -2, -1, 2)$. □