Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ?

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&5&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&7\\0&2&2\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&7&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2×2 échelonnées réduites.

Exercice 3. Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée réduite. En déduire leur rang et une base de leur image, puis la dimension de leur noyau et une base de celui-ci.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&7\\2&-1&5\\-1&-3&-9\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&2&13\\1&-2&3&17\\-1&3&-3&-20\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&3&-2&0&-1\\-1&-1&1&3&1\\2&2&-1&2&2\\0&0&1&8&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1&3&3&3\\1&2&2&5&8\\1&0&-1&0&1\\1&1&-3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$E = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}.$$

Quelle est la dimension de E ? Construire une base de E.

Exercice 5. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donné par les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\end{cases}$$

Donner une équation paramétrique de ce sous-espace vectoriel et le décrire d'un point de vue géométrique.

Exercice 6. On considère le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$. Donner une équation paramétrique de ce plan. À partir de ce paramétrage, obtenir une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 7. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$c_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ c_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Notons la matrice $P=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$. Calculer, si possible, l'inverse de la matrice P. La famille (c_1,c_2,c_3) est-elle une base de $\mathbf{R}^3$? Si oui, calculer les coordonnées du vecteur v dans celle-ci.

Exercice 8. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer qu'il existe un unique triplet de formes linéaires (l_1, l_2, l_3) sur $\mathbf{R}^3$ telles que pour tout i, j,
$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$
3. Calculer les coordonnées de l_1, l_2, l_3 dans la base de l'espace des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ donnée par
$$e_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad e_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad e_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$
La base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est appelée base canonique duale de $\mathbf{R}^{3*}$ tandis que la base (l_1, l_2, l_3) est la base duale de (v_1, v_2, v_3).

Exercice 9. Soit l_1, l_2, l_3 les formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3, \qquad l_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_3.$$

Trouver trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 10. On considère les deux formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^3$:

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

1. Écrire les matrices de l_1 et l_2 relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer que l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes.
3. Trouver une forme linéaire l_3 telle que la famille (l_1, l_2, l_3) soit une base de $\mathbf{R}^{3*}$.

Exercice 11. On considère les trois formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_3 + x_4, \\ l_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 + x_4, \\ l_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

1. Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.
2. Trouver une forme linéaire l_4 telle que la famille (l_1, l_2, l_3, l_4) soit une base de $\mathbf{R}^{4*}$.

Exercice 12. Soient l_1 et l_2 deux formes linéaires non-nulles sur un espace vectoriel E.

1. Montrer que la famille (l_1, l_2) est liée si et seulement si $\ker(l_1) = \ker(l_2)$.
2. Montrer que si (l_1, l_2) est libre, alors $\dim(\ker(l_1) \bigcap \ker(l_2)) = \dim(E) - 2$ (*On pourra appliquer le théorème du rang à la restriction de l_1 à* $\ker(l_2)$).

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. Montrer que $x \neq 0$ si et seulement si il existe $l \in E^*$ telle que $l(x) = 1$. Déterminer $\bigcap_{l \in E^*} \ker(l)$.