Formes bilinéaires, formes quadratiques

Exercice 1. Déterminer, parmi les applications suivantes, quelles sont les applications bilinéaires sur l'espace vectoriel E spécifié.

1. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 + x_1y_2$;
3. $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_2 + x_1)y_2$;
4. $E = M_n(\mathbf{R})$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.
5. $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles,
$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ dt \qquad \text{pour tout } f, g \in C^0([0, 1], \mathbf{R}).$$
6. $E = \mathbf{R}^2$,
$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbf{R}^2$. On note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

Pour les formes bilinéaires suivantes, écrire leur matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, calculer leur rang et leur noyau et déterminer si elles sont symetriques.

1. $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $\varphi_2(x, y) = x_1y_2$;
3. $\varphi_3(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$;
4. $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$;
5. $\varphi_5(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$;
6. $\varphi_6(x, y) = x_1y_1$;
7. $\varphi_7(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;
8. $\varphi_8(x, y) = x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$.

Étant donnée une forme symétrique φ parmi les précédentes, déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(x, x) = 0\}$ et le comparer avec le noyau.

Exercice 3. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $q\colon E \to \mathbf{R}$ une application. Montrer que q est une forme quadratique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, pour tout $x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$,
2. l'application $E \times E \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x - y)$ est bilinéaire symétrique.

Exercice 4. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $q\colon E \to \mathbf{R}$ une forme quadratique. Montrer l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$, $q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y))$.

Exercice 5. On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbf{R}^3$:

$$Q_0(x, y, z) = x^2+y^2+xz, \quad Q_1(x, y, z) = 2x^2+6xy-2xz+y^2+4yz-3z^2, \quad Q_2(x, y, z) = xy+3xz.$$

1. Pour chacune d'elles, écrire la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire symétrique associée et déterminer son rang et son noyau.
2. Décomposer Q_0, Q_1 et Q_2 en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et déterminer pour chacune la signature et le rang.

3. Donner une base orthogonale pour chacune de ces formes quadratiques.

Exercice 6. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbf{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont les suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles, écrire la forme quadratique associée $q_i(x_1, x_2, x_3)$ puis écrire q_i comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de q_i.

Exercice 7. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz.$$

1. Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner la signature de Q et son rang.
3. Donner une base de $\mathbf{R}^3$ orthogonale pour la forme quadratique Q.

Exercice 8. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie par

$$Q(x, y, z, t) = xy + xz - xt + yz + yt.$$

1. Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. À quoi est égal le noyau de Q ?
3. Donner un exemple de vecteur $v \in \mathbf{R}^4$ non nul tel que $Q(v) = 0$. Comment s'appelle un tel vecteur ?

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel et l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles définies sur E. On pose pour tout $x \in E$,

$$Q(x) = l_1(x)\, l_2(x).$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E en explicitant la forme bilinéaire associée.
2. En déduire le noyau et le rang de Q.
3. On se place sur $E = \mathbf{R}^3$ et on considère les formes linéaires l_1 et l_2 données par

   $$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2.$$

   Donner les coordonnées de l_1 et l_2 dans la base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ sous forme de vecteurs lignes et calculer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 10. On considère les coniques du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ données par les équations

$$C_1 : 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 10x - 1 = 0,$$
$$C_2 : 3x^2 - 4xy + 2y - 1 = 0,$$
$$C_3 : x^2 + 4xy + 4y^2 + x - 4 = 0.$$

Déterminer la nature géométrique de ces coniques. Pour les hyperboles, on déterminera les droites asymptotes. Pour les ellipses, on déterminera leur centre. Dessiner ces coniques.

Exercice 11. Déterminer la nature géométrique des quadriques de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$\begin{aligned}
&Q_1 : xy + 3xz + z = 0,\\
&Q_2 : xy + yz + zx + 2y + 1 = 0,\\
&Q_3 : 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 5 = 0,\\
&Q_4 : x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 4z - 4y + 2x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 12. On se place dans $\mathbf{R}^3$.

1. De quelle nature est la quadrique de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = xy$? Que peut-on dire de son intersection avec le plan horizontal passant par l'origine ?
2. On considère deux droites de $\mathbf{R}^3$ passant par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et dirigées respectivement par les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 0)$. Trouver l'équation d'un paraboloïde hyperbolique contenant ces deux droites. *Indication : trouver l'équation du plan contenant les droites.*

Exercice 13. On se place dans $\mathbf{R}^3$.

1. Donner la liste des types de quadriques dont la forme quadratique est non dégénérée.
2. Montrer que pour chacune de ces quadriques, il existe un point tel que la symétrie centrale relativement à ce point laisse invariante la quadrique.
3. Calculer ce centre de symétrie pour la quadrique d'équation :

$$z^2 + 2z + xy + y = 0.$$

Quelle est la nature de cette quadrique ?

Exercice 14. Soit E un espace de dimension finie n et Q une forme quadratique sur E. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice de Q dans cette base.

1. Le déterminant de A dépend-il de la base choisie ?
2. Montrer que son signe ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 15. On se donne trois réels a, b, $c \in \mathbf{R}$ et on pose $\Delta = ac - \frac{b^2}{4}$. Considérons la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de Q en coordonnées.
2. Montrer que le signe de Δ ne dépend que de la signature de Q (*cf.* exercice précédent).
3. Montrer que la forme quadratique est non dégénérée si et seulement si Δ est non nul.
4. Calculer le signe de Δ pour chacune des valeurs possibles de la signature.
5. En déduire que Δ est strictement négatif si et seulement si la signature vaut $(1, 1)$.

Exercice 16. Soit a, $b \in \mathbf{R}$. On considère la forme quadratique Q sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 3b \\ 2a & 3b & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Cette forme quadratique intervient dans l'étude des extensions cubiques en théorie de Galois.

1. Calculer le déterminant de cette matrice ; on le notera Δ.
2. Calculer $Q(1,0,0)$; Montrer que la signature de Q n'est pas égale à $(0,3)$.
3. Montrer que si $\Delta < 0$, la signature vaut $(2,1)$.
4. Calculer la matrice de Q en restriction à l'espace $\mathcal{E}$ engendré par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.
5. En déduire que si $\Delta > 0$, Q est définie positive sur $\mathcal{E}$.
6. Montrer que si $\Delta > 0$, la signature de Q vaut $(3,0)$.