# Espaces euclidiens

**Exercice 1.** On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$ composé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que l'expression suivante définit un produit scalaire sur cet espace :

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{3} P_1(k)P_2(k).$$

Soit $d \geq 1$ un entier. On se place sur l'espace $\mathbf{R}_d[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $d$. Pour quelles valeurs de $n$ l'expression suivante définit-elle un produit scalaire sur cet espace ?

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} P_1(k)P_2(k).$$

**Exercice 2.** On se place sur l'espace vectoriel $C^0([a,b], \mathbf{R})$ des fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que l'expression suivante définit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([a,b], \mathbf{R})$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\, dt.$$

Supposons $h$ strictement positive. Cette expression définit-elle un produit scalaire sur $C^0([a,b], \mathbf{R})$ ?

**Exercice 3.** Pour $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A.{}^tB)$ (où Tr désigne la trace d'une matrice et ${}^t$ la transposée). Montrer que cette expression définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La forme quadratique associée est notée $\| \cdot \|^2$. Développer l'expression

$$\Big\| x\|y\| - \|x\|y \Big\|^2.$$

En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire standard, montrer

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

**Exercice 6.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

**Exercice 7.** Soient $a < b$ dans $\mathbf{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Pour tout $f \in E$, montrer que

$$\left( \int_a^b |f(t)|\ dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2\ dt.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? Indication : remarquer que $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

**Exercice 8.** Soit $P$ un polynôme défini sur $\mathbf{R}$. Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^{1} tP(t)\ dt\right)^2 \leq \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} P(t)^2\ dt.$$

Peut-on avoir l'égalité ?

**Exercice 9.** Soit $E$ un espace euclidien et $x, y, z \in E$. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à trois variables :

$$\|x\|^2\langle y,z\rangle^2 + \|y\|^2\langle x,z\rangle^2 + \|z\|^2\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle\langle z,x\rangle.$$

On pourra commencer par le cas où $x$, $y$, $z$ sont linéairement indépendants et s'intéresser au déterminant de la matrice du produit scalaire dans la base $(x, y, z)$.

**Exercice 10.** Soit $E$ un espace euclidien et $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique positive. Montrer que son cône des vecteurs isotropes coïncide avec son noyau.

**Exercice 11.** Soit $V$ un espace euclidien. On suppose qu'il existe une suite orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $V$, c'est-à-dire telle que

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbf{N}, \qquad \langle e_p, e_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q \in \mathbf{N}$, on pose $c_q(f) = \langle e_q, f\rangle$.

1. Donner une formule de la projection orthogonale de $f$ sur le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_0, \ldots, e_n\}$, on la notera $S_n(f)$.
2. Notons aussi $R_n(f) = f - S_n(f)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que $\langle e_p, R_n(f)\rangle = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.
3. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2.$$

   En déduire que la série $\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2$ est convergente.
4. Exemple : ici $V$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   Notons $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi pt)$. Montrer que la suite $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie la condition $(*)$ ci-dessus.

**Exercice 12.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension finie. Montrer que pour tout $l \in E^*$, il existe un unique $v_l \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $l(x) = \langle x, v_l\rangle$. *(On montrera que l'application $v \in E \mapsto \langle \cdot, v\rangle \in E^*$ est un isomorphisme).*