Géométrie euclidienne

Exercice 1. Soit x, y deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Notons $\mathrm{Aire}(x,y)$ l'aire du parallélogramme de côtés x, y. Montrer que $\mathrm{Aire}(x,y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$.

Exercice 2. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercice 3. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$. On considère l'hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

1. Trouver un vecteur v de norme 1 orthogonal à cet hyperplan.
2. Donner une expression pour la projection orthogonale de $x \in \mathbf{R}^n$ sur la droite dirigée par v.
3. En déduire une expression pour la distance $d(x, H)$ de x à H.
4. Calculer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3) \in \mathbf{R}^3$ au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 4. On considère le sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ donné par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Donner une base orthonormée de H.
2. Exprimer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur H et de la symétrie orthogonale par rapport à H.
3. Calculer la distance des vecteurs suivants à H.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit p l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1. Vérifier que p est une projection (*i.e.* $p \circ p = p$) et que $\mathbf{R}^3 = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$.
2. Montrer que p est une projection orthogonale. (*On rappelle qu'une projection est dite orthogonale si la somme directe de son noyau et de son image est une somme orthogonale.*)

Exercice 6. Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbf{R}^3$, P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et s la symétrie orthogonale par rapport à P.

1. Citer une formule du cours exprimant $s(x)$ en fonction de x et de n, où n est un générateur de $P^\perp$.
2. Écrire la matrice de s dans la base canonique de $\mathbf{R^3}$.

Exercice 7. Soit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et calculer A^2.
2. Déduire les caractéristiques géométriques de A.

Exercice 8. Soient $(p,q) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$ et soit

$$B = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2-p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

Montrer que B appartient à $O_2(\mathbf{R})$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 9. Pour un nombre réel θ, soit $r_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotation vectorielle d'angle θ.

1. Écrire la matrice R_θ de r_θ dans la base canonique.

Pour un nombre réel α, soient

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}), \qquad v_{\alpha/2} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2.$$

2. Vérifier que la matrice S_α appartient à $O_2^-(\mathbf{R})$.
3. Calculer $S_\alpha v_{\alpha/2}$.
4. Déduire que S_α est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $v_{\alpha/2}$.
5. Calculer $R_\theta R_\omega$, $S_\alpha S_\beta$, $R_\theta S_\alpha$ et $S_\alpha R_\theta$, puis interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 10. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire standard. Écrire la rotation d'angle θ comme la composée de deux réflexions orthogonales.

Exercice 11. Décrire géométriquement les transformations du plan suivantes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit E un espace euclidien.

1. Soient $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\|x\| \le \|x + \lambda y\|.$$

(*Considérer le discriminant du polynôme* $P(\lambda) = \|x+\lambda y\|^2 - \|x\|^2$).

2. Soit $p : E \to E$ une projection (*i.e.* $p \circ p = p$). Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si pour tout $v \in E$,

$$\|p(v)\| \le \|v\|.$$

(*Utiliser le point précédent pour montrer que le noyau et l'image de* p *sont orthogonaux.*)