EXERCICES SUR LES AUTOMORPHISMES

Soit E une courbe elliptique sur un corps algébriquement clos k de caractéristique différente de 2 et 3, d'équation de Weierstrsass

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

On note $o = [1 : 0 : 0]$ l'élément neutre de E.

Exercice 0.1. Soit G le groupe des automorphismes φ de E respectant la loi de groupe. Montrer les faits suivants :

(1) Le groupe G admet une représentation $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_3(k)$ dont l'action induite sur $\mathbb{P}^2(k)$ stabilise E.

(2) Le groupe G stabilise le point $[1 : 0 : 0]$ et la droite $y = 0$.

(3) Étant donné $g \in G$, il existe $\lambda \in k^*$ tel que

$$g[1 : x : y] = [1 : \lambda^2 x : \lambda^3 y].$$

(Indication : calculer $g^*\omega$ pour une forme différientelle invariante ω.)

(4) On a

$$G = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } j \neq 0, 1728, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } j = 1728, \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

(5) Soit m un entier premier à la caractéristique de k. Alors l'application naturelle $G \to \mathrm{Aut}(E[m])$ est injective.