EXERCICES SUR LES POINTS D'INFLEXION

Dans toute cette feuille k désigne un corps algébriquement clos.

Soit $f \in k[x_0, x_1, x_2]$ un polynôme homogène de degré d et soit $X \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ la courbe algébrique associée.

Exercice 0.1 (Formule d'Euler)**.** Montrer l'égalité suivante :

$$\deg(f)f = \sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i}.$$

Définition 0.2. Un *point d'inflexion* de X est un point non singulier de X dont la multiplicité d'intersection de X avec la droite tangente à x est > 2.

Définition 0.3. L'*hessienne* de f est le polynôme homogène de degré $3(d-2)$ suivant :

$$\mathrm{Hess}(f) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i x_j} : i, j = 0, 1, 2\right).$$

Exercice 0.4. Montrer la relation suivante :

$$x_0^2 \,\mathrm{Hess}(f) = \det\begin{pmatrix} d(d-1)f & (d-1)f_{x_1} & (d-1)f_{x_2} \\ (d-1)f_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ (d-1)f_{x_2} & f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix},$$

où, pour un polynôme $g \in k[x_0, x_1, x_2]$, on pose $g_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}$. En particulier, $\mathrm{Hess}(f) = 0$ si la caractéristique de k divise $d-1$.

Exercice 0.5. On suppose $d \geqslant 3$ et que la caractéristique du corps k est différente de 2 et ne divise pas $d-1$. Montrer les faits suivants :

(1) Soit $p \in X$ un point singulier. Montrer que $\mathrm{Hess}(f)$ s'annule en p.

(2) Soit $p \in X$ un point lisse et L la droite tangente à X en p. Alors $\mathrm{Hess}(f)$ s'annule en p si et seulement la multiplicité d'intersection de L avec X en x est > 2. (Indication : on choisira des coordonnées telles que $p = [1 : 0 : 0]$ et L est d'équation $x_2 = 0$.)

(3) L'intersection de f et $\mathrm{Hess}(f)$ consiste des points singuliers de X et des points d'inflexion de X.

(4) Soit $p \in X$ un point tel que la tangente de L en p ne soit pas une composante irréductible de X. Alors,

$$i_p(X, L) = i_p(\mathrm{Hess}(f), f) + 2.$$

(5) On suppose k de caractéristique 3. Montrer que tous les points lisses de la courbe d'équation $x_2^2 x_0 = x_1^3$ sont des points d'inflexion.

Exercice 0.6. Soit $E \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ une courbe elliptique ayant comme élément neutre un point d'inflexion. Montrer les faits suivants :

(1) un point $p \in E$ est de 3-torsion (*i.e.* $3p = 0$ dans E) si et seulement si p est un point d'inflexion ;

(2) si k est caractéristique différente 2, 3 il y a exactement 9 points de 3-torsion.