EXERCICES SUR LES POINTS DE TORSION

Dans toute cette feuille k désigne un corps algébriquement clos.

Soit E une courbe elliptique d'élément neutre $o \in E$. Pour tout $m \geqslant 1$ on considère l'application $\iota_m \colon E \to \mathbb{P}(\mathcal{L}^*_{m[0]})$. Soit $f \in \mathcal{L}_{2[0]}$ non constante et soit $g \in \mathcal{L}_{3[0]}$ telle que $1, f, g$ forment une base de $\mathcal{L}_{3[0]}$.

Exercice 0.1 ([Silverman, Chapitre III, Ex. 3.10])**.** Montrer les assertions suivantes :

(1) ι_4 est une immersion fermée.

(2) L'application ι_4, pour tout $p \in E \smallsetminus \{0\}$ est donné par
$$\iota_4(p) = [1 : f(p) : g(p) : f(p)^2].$$

(3) L'image de ι_4 est donnée par une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^3$.

(4) Étant donné un plan $H \subset \mathbb{P}^3$, l'intersection est formée exactement de 4 points (en comptant la multiplicité).

(5) L'hyperplan d'équation $T_0 = 0$ rencontre $\iota_4(E)$ en le point $\iota_4(o)$ avec multiplicité 4.

(6) Étant donnés $p_1, \ldots, p_4 \in E$, on a $p_1 + \cdots + p_4 = o$ si et seulement si $\iota_4(p_1), \ldots, \iota_4(p_4)$ sont coplanaires.

(7) Un point $p \in E$ est de 4-torsion si et seulement si il existe un hyperplan qui rencontre $\iota_4(E)$ en p avec multiplicité 4.

(8) Si la caractéristique du corps k est différente de 2 il y a exactement 16 points de 4-torsion. (Indication : p est de 4-torsion si et seulement si $p+p+2p = 0$.)

(9) Si $\mathrm{char}(k) \neq 2$, trouver un changement de variables pour lequel $\iota_4(E)$ a équations
$$t_0t_3 = t_0^2 + t_2^2,$$
$$t_2t_3 = t_1^2 + \alpha t_2^2,$$
pour un certain $\alpha \in k$. (Indication : que remarque-t-on sur ces deux formes quadratiques ?)

Réciproquement, étant donné des équations comme ci-dessus, pour quelles valeurs de α la courbe associée est non singulière ?

Exercice 0.2 ([Silverman, Chapitre III, Ex. 3.11])**.** Montrer les assertions suivantes :

(1) Pour $m \geqslant 3$, ι_m est une immersion fermée.

(2) Les fonctions rationelles $1, f, f^2, \ldots, f^{\lfloor m/2 \rfloor}, g, fg, \ldots, f^{\lfloor (m-3)/2 \rfloor} g$ forment une base du k-espace vectoriel $\mathcal{L}_{m[o]}$.

(3) L'image d'un point $p \in E \smallsetminus \{0\}$ par ι_m est
$$[1 : f(p) : \cdots : f(p)^{\lfloor m/2 \rfloor} : g(p) : f(p)g(p) : \cdots : f(p)^{\lfloor (m-3)/2 \rfloor} g(p)].$$

(4) L'hyperplan d'équation $T_0 = 0$ rencontre $\iota_m(E)$ en le point $\iota_m(o)$ avec multiplicité m.

(5) Étant donné un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^{m-1}$, l'intersection est formée exactement de m points (en comptant la multiplicité). On dit que $\iota_m(E)$ est une courbe de degré m.

(6) Étant donnés $p_1, \dots, p_m \in E$, on a $p_1 + \cdots + p_m = o$ si et seulement si $\iota_m(p_1), \dots, \iota_m(p_m)$ sont contenus dans un hyperplan.

(7) Un point $p \in E$ est de m-torsion si et seulement s'il existe un hyperplan qui rencontre $\iota_m(E)$ en p avec multiplicité m.

(8) $(*)$ Si la caractéristique du corps k est $> m$ ou nulle, montrer qu'il y a exactement m^2 points de m-torsion.

Exercice 0.3. On considère la courbe E donnée par l'équation

$$y^2 + xy = x^3 + ax + b,$$

avec $a, b \in k$.

(1) Pour quelles valeurs de $a, b \in k$ la courbe E est non singulière ?

(2) Montrer que, pour un point $p = (x, y)$ on a $-p = (x, -x - y)$.

(3) Si la caractéristique de k est 2, calculer les points de 2-torsion de E.