FEUILLE D'EXERCICES DU CHAPITRE 1

Exercice 1. Pour chacun des ensembles suivants muni d'une loi de composition interne, dire quels sont des groupes :

(1) $(\mathbb{N}, +)$	(2) $(\mathbb{Z}, +)$	(3) $(\mathbb{Z}, \times)$	(4) $(\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \times)$
(5) $(\mathbb{Q}, \times)$	(6) $(\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}, \times)$	(7) $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Q}), +)$	(8) $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Q}), \times)$
(9) $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}), \times)$	(10) $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$	(11) $(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$	(12) $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 2. Soit $(\mathrm{G}, *)$ un groupe.

(1) Soient H, H' des sous-groupes de G. Montrer que $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ est un sous-groupe de G.

(2) Est-ce que la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe ?

Exercice 3. Soit S_n le groupe des permutations sur n éléments. Une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est paire si sa signature $\varepsilon(\sigma) = 1$.

(1) Montrer que $\mathrm{A}_n = \{\sigma \in \mathrm{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de S_n ;

(2) Calculer la cardinalité de A_n.

Exercice 4. Soit $(\mathrm{G}, *)$ un groupe. Si la G cardinalité est $\leqslant 3$, montrer que G est commutatif. On considère le sous-ensemble

$$\mathrm{K} = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset \mathrm{S}_4.$$

Montrer que K est un sous-groupe et écrire sa table de multiplication.

Exercice 5. Parmi les applications suivantes dire lesquelles sont des morphismes de groupes :

(1) $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$,	(2) $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0},\ z \mapsto \lvert z \rvert$,	(3) $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \mathrm{Re}\, z$,
(4) $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \mathrm{Im}\, z$,	(5) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1$	(6) $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 6. Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ on considère l'application linéaire

$$\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad e_i \longmapsto e_{\sigma(i)}.$$

(1) Est-ce que φ_σ est bijective ?

(2) Pour $n = 2, 3$ écrire la matrice de φ_σ pour tout $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

(3) Montrer que l'application $\mathrm{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ est un morphisme de groupes.

Exercice 7. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Montrer que l'application

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_n, \qquad k \longmapsto e^{2k\pi i/n}.$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 8. Pour chacune des permutations suivantes, déterminer l'écriture comme produit de cycles de supports disjoints, puis la signature :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$