2MA123 : FEUILLE D'EXERCICES 1

Exercice 1. Soit K un corps. Étant donnée une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ on écrit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ avec $a_{ij} \in \mathrm{K}$. On considère les ensembles suivants :

$$\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}, \qquad \mathrm{B} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\},$$
$$\mathrm{U} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}, \qquad \mathrm{B}' = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}.$$

Montrer les faits suivants :

(1) Les sous-ensembles T, B, U et B′ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$.
(2) $\mathrm{T} = \mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$.
(3) Pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $b \in \mathrm{B}$ on a $bub^{-1} \in \mathrm{U}$.
(4) L'application $\mu \colon \mathrm{T} \times \mathrm{U} \to \mathrm{B}$, $(t,u) \mapsto tu$ est bijective. Est-ce que c'est un isomorphisme de groupes ?
(5) Écrire explicitement l'inverse de l'application μ.

Exercice 2. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition d'un entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire que $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geqslant 1$ sont des entiers tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$. On écrira une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ comme une matrice à blocs $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{i,j=1,\dots,r} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ où les A_{ij} sont des matrices $n_i \times n_j$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{r1} & \cdots & \mathrm{A}_{rr} \end{pmatrix}.$$

On considère les sous-ensemble suivants de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$:

$$\mathrm{L} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : \mathrm{A}_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}, \qquad \mathrm{P} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : \mathrm{A}_{ij} = 0 \text{ si } i > j\},$$
$$\mathrm{R} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : \mathrm{A}_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } \mathrm{A}_{ii} = \mathrm{id}_{n_i}\}, \qquad \mathrm{Q} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) : \mathrm{A}_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}.$$

Montrer les faits suivants :

(1) Les sous-ensembles L, P, Q et R sont des sous-groupes.
(2) $\mathrm{L} = \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$.
(3) Pour tout $r \in \mathrm{R}$ et $p \in \mathrm{P}$ on a $prp^{-1} \in \mathrm{R}$.
(4) L'application $\mu \colon \mathrm{L} \times \mathrm{R} \to \mathrm{P}$, $(\ell, r) \mapsto \ell r$ est bijective. Est-ce que c'est un isomorphisme de groupes ?
(5) Écrire explicitement l'inverse de l'application μ pour $n = 4$ et $\lambda = (2,2)$.

Exercice 3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente* c'est-à-dire telle que $\mathrm{A}^r = 0$ pour un certain entier $r \geqslant 1$. Soit N l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale.

(1) Montrer que la somme $\exp(\mathrm{A}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^i}{i!}$ est finie (avec la convention $\mathrm{A}^0 = \mathrm{id}$).
(2) Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent, *i.e.* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Alors
$$\exp(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A}) \exp(\mathrm{B}).$$
(3) Déduire que la matrice $\exp(\mathrm{A})$ est inversible.

(4) On suppose $\mathrm{A} \in \mathrm{N}$. Montrer que A est nilpotente et que $\exp(\mathrm{A})$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

(5) Pour $n = 2, 3$ calculer $\exp(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{N}$.

(6) Est-ce que le sous-ensemble des matrices nilpotentes est un sous-groupe de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

(7) Montrer que N est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(8) Est-ce que $\exp\colon \mathrm{N} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes ?

Exercice 4. Soient G un groupe et $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \subseteq \mathrm{G}$ des sous-groupes. Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{H}'$ est un sous-groupe si et seulement si $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}'$ ou $\mathrm{H}' \subseteq \mathrm{H}$.

Exercice 5. Soient G un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6. Soit G un groupe. On dit que $x, y \in \mathrm{G}$ sont *conjugués* si $y = gxg^{-1}$ pour un certain $g \in \mathrm{G}$.

(1) Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence.

(2) Pour $x \in \mathrm{G}$ montrer que $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} : gxg^{-1} = x\}$ est un sous-groupe de G.

(3) On considère $\mathrm{G} = \mathrm{S}_3$ et $\sigma = (123)$. Montrer que $\mathrm{G}_\sigma = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$.

Exercice 7. On considère les applications $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $\theta \mapsto e(t) := \exp(2\pi i\theta)$ et $r\colon \mathbb{R} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\theta \longmapsto r(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer les faits suivants :

(1) L'application e est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau et son image.

(2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice $r(\theta)$ est inversible.

(3) L'application $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\theta \mapsto r(\theta)$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau et son image.

(4) Il existe un unique isomorphisme de groupes $f\colon\ \mathrm{Im}\, e \to \mathrm{Im}\, r$ tel que $f(e(\theta)) = r(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère les transpositions $\tau_i = (i, i+1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $\tau_n = (n, 1)$ dans S_n. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ montrer les relations suivantes :

(1) $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ si $j > i+1$;

(2) $\tau_i\tau_j\tau_i = \tau_j\tau_i\tau_j$ si $j = i+1$.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère les sommets du polygône régulier à n côtés :

$$\mathrm{P}_n = \{(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi i/n)) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, \dots, n-1\} \subset \mathbb{R}^2$$

et le sous-ensemble des isométries du plan qui les préservent :

$$\mathrm{D}_n := \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) : g(\mathrm{P}_n) = \mathrm{P}_n\} \subset \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{id}\}.$$

(1) Montrer que D_n est un sous-groupe.

(2) Montrer que

$$\mathrm{R}_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{D}_n \iff \theta = 2\pi k/n \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors $\mathrm{R}_\theta(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}_{i+k \pmod n}$.

(3) Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}(1, 0)$. Montrer que $\mathrm{S}(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}_{-i \pmod n}$.

(4) On pose $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{2\pi/n}$. Montrer que $\mathrm{ord}(\mathrm{R}) = n$, $\mathrm{ord}(\mathrm{S}) = 2$ et $\mathrm{SRS} = \mathrm{R}^{-1}$.

(5) Montrer que $\mathrm{D}_n = \{\mathrm{R}^i, \mathrm{SR}^i : i = 0, \dots, n-1\}$. Conclure que $|\mathrm{D}_n| = 2n$.