FEUILLE DE TD 2

Exercice 1. Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f\colon \mathrm{V}^n \to \mathrm{W}$ une application n-linéaire. Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $x, y \in \mathrm{V}$.

(1) Exprimer $f(\lambda x, \dots, \lambda x)$ en termes de $f(x, \dots, x)$.

(2) Pour $n = 2, 3$ développer respectivement $f(x+y, x+y)$ et $f(x+y, x+y, x+y)$.

(3) On suppose f symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?

(4) On suppose f symétrique mais n quelconque. Donner une formule pour $f(x+y, \dots, x+y)$.

Exercice 2. On considère l'application $\omega\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$$

où $x = (x_1, \dots, x_4)$ et $y = (y_1, \dots, y_4)$.

(1) Montrer que ω est une application bilinéaire antisymétrique.

(2) En déduire que si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\omega(x, y) = 0$.

(3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) := \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

où $x = (x_1, \dots, x_4)$ et $y = (y_1, \dots, y_4)$. Montrer les affirmations suivantes :

(1) L'application f est bilinéaire antisymétrique.

(2) Si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $f(x, y) = 0$.

(3) Si $x_1 \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ alors $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}^4$ non liés tels que $f(x, y) = 0$?

(5) Trouver une application bilinéaire antisymétrique $g = (g_1, \dots, g_n)\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 3$ telle que $f = (g_1, g_2, g_3)$ et $g(x, y) = 0$ si et seulement si x, y sont liés.

Exercice 4. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,8}$ une matrice carrée de taille 8 à coefficients dans un corps K. Dans la formule de $\det(\mathrm{A})$ déterminer le signe correspondant aux termes suivants :

(1) $a_{1,8}a_{2,7}a_{3,1}a_{4,6}a_{5,3}a_{6,4}a_{7,2}a_{8,5}$;

(2) $a_{1,8}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,6}a_{5,5}a_{6,7}a_{7,4}a_{8,2}$;

(3) $a_{1,3}a_{2,6}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1}a_{6,8}a_{7,7}a_{8,2}$;

(4) $a_{1,6}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2}a_{6,3}a_{7,7}a_{8,8}$.

Exercice 5. On considère la permutation sur 8 élements suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_8(\mathbb{Q})$ avec $a_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 5$ sinon. Montrer que $\det(\mathrm{A}) - 1$ est un multiple de 25. (*Indication.* Utiliser la formule explicite de $\det(\mathrm{A})$ et remarquer que si $\tau \in \mathrm{S}_8 \smallsetminus \{\sigma\}$ alors σ et τ diffèrent en deux valeurs.)

Exercice 6. Soient K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. Pour $a_0, \ldots, a_n \in \mathrm{K}$ on considère le déterminant dit de *Vandermonde*

$$\mathrm{V}(a_0, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante :

$$(\heartsuit) \qquad \mathrm{V}(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

(1) Montrer que $\mathrm{V}(a_0, \ldots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour certains $i \neq j$.

(2) Vérifier le résultat pour $n = 1, 2$.

(3) Montrer la formule

$$(\clubsuit) \qquad \mathrm{V}(a_0, \ldots, a_n) = \mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0).$$

(4) Conclure par récurrence.

(5) Soit $\mathrm{K}[\mathrm{X}]_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Si $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts, montrer que l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$\mathrm{K}[\mathrm{X}]_{\leqslant n} \longrightarrow \mathrm{K}^{n+1}, \qquad f \longmapsto (f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

(6) Déduire qu'étant donnés $b_0, \ldots, b_n \in \mathrm{K}$ il existe un unique polynôme f de degré $\leqslant n$ tel que $f(a_i) = b_i$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de ($\clubsuit$).

(1) Montrer que $f(\mathrm{X}) := \mathrm{V}(\mathrm{X}, a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.

(2) Déterminer les racines de f.

(3) Calculer le coefficient dominant de f.

(4) Conclure.

Exercice 8. Pour un entier $n \geqslant 1$ soit

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$$

la matrice dont les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $\mathrm{D}_n = \det(\mathrm{A}_n)$.

(1) Calculer D_1 et D_2.

(2) Montrer que $\mathrm{D}_n = b\mathrm{D}_{n-1} + c\mathrm{D}_{n-2}$, pour des entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

(3) Soit V l'espace vectoriel formé par les suites $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{i+2} = bu_{i+1} + cu_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2.

(4) Déterminer les $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ distincts tels que $u = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $v = (\mu^i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartiennent à V.

(5) Montrer que u et v forment une base de V.

(6) Donner une formule pour D_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 9. Soient $a \in \mathrm{K}^\times$ et

$$\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire la valeur de $\det(\mathrm{A})$ en fonction de a.

Exercice 10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$\mathrm{A}_t := \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & t+6 \\ 4 & 4 & 6-t & 8 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer $\det \mathrm{A}_t$.

(2) Déterminer les nombres réels t pour lesquels la matrice A_t n'est pas inversible.

(3) Déterminer le noyau de A_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.