FEUILLE DE TD 3

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.

(2) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

(3) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ.

Exercice 2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.

(2) Déterminer si B est diagonalisable ou non.

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$, $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.

(1) Déterminer la dimension de E.

(2) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.

(3) Soit $D : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. Montrer que E est stable par D.

(4) On suppose que les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 de P sont non nulles et deux à deux distinctes. Montrer que les suites $(\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

(5) On suppose $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tel que $u_0 = 1$ et $u_1 = 4 = u_2$. Déterminer u_{99} et u_{100}.

Exercice 4. Soient $a \in K^\times$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que l'espace propre $\operatorname{Ker}(M_a + a\,\mathrm{id}_n)$ est de dimension $n - 1$.

(2) En calculant $\operatorname{Tr}(M_a)$, trouver la dernière valeur propre de M_a. En déduire que M_a est diagonalisable et déterminer le déterminant de M_a.

Exercice 5. On considère les matrices suivantes, à coefficients dans un corps K :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}_t = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{G}_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

avec $t \in \mathrm{K}$. Pour $\mathrm{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ déterminer quand ces matrices sont diagonalisables et les diagonaliser si elles le sont.

Exercice 6. Diagonaliser la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 7. Soient $n \geqslant 1$ un nombre entier et $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$ on considère l'application linéaire $\varphi_\sigma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

(1) Montrer que pour tout $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ on a $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau = \varphi_{\sigma \circ \tau}$.

(2) On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice J de l'application φ_σ et montrer sans calculs que $\mathrm{J}^n = \mathrm{id}$.

(3) Soient $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $\zeta_k = e^{2k\pi i/n}$. Montrer que le vecteur $v_k = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} e_i$ est un vecteur propre de J. Déterminer la valeur propre correspondante.

(4) Montrer que les vecteurs v_k sont linéairement indépendants. (*Indication.* Utiliser le déterminant de Vandermonde.)

(5) Pour $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ on considère la matrice

$$\mathrm{C}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \mathrm{J}^i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Écrire la matrice $\mathrm{C}(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

(6) Pour tout $k = 0, \ldots, n-1$ montrer que v_k est un vecteur propre de $\mathrm{C}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ et en déterminer la valeur propre correspondante.

(7) Calculer le déterminant de $\mathrm{C}(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Exercice 8. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Pour une valeur propre $\lambda \in \mathrm{K}$ d'un endomorphisme linéaire f de V, soit $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique correspondant. Si g est un endomorphisme linéaire de V qui commute avec f, montrer que $g(\mathrm{V}_\lambda) \subset \mathrm{V}_\lambda$ et $g(\mathrm{V}_{(\lambda)}) \subset \mathrm{V}_{(\lambda)}$.

(2) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux, alors il existe une base de V sur laquelle $f_1, \ldots, f_n$ simultanément.