

TD1 : FONCTIONS HOLOMORPHES

Exercice 1.

- (1) Montrer que si ω est une 1-forme différentielle C^1 au voisinage de $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, alors

$$\int_{[0,1]^2} d\omega = \int_{\partial[0,1]^2} \omega := \int_{[0,1,1+i,0]} \omega.$$

- (2) En déduire que si ω est une 1-forme différentielle C^1 fermée sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ lorsque γ_1 et γ_2 sont
- soit deux lacets C_{pm}^1 homotopes, en tant que lacets, dans Ω ;
 - soit des chemins C_{pm}^1 ayant des extrémités égales et homotopes à extrémités fixées dans Ω .

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine $U \subset \mathbb{C}$. Montrer les assertions suivantes :

- (1) La forme différentielle $\omega = f(z)dz$ est fermée.
 (2) Pour tout lacets $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 par morceaux et homotopes dans U on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

- (3) On suppose dorénavant U *simplement connexe*. Pour tout $a, b \in U$, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

ne dépend pas du chemin C^1 par morceaux choisi pour relier a et b .

- (4) Étant donné $z_0 \in U$, la fonction

$$F: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{z_0}^z f(t)dt$$

est holomorphe et satisfait $F'(z) = f(z)$.

- (5) Si f ne s'annule jamais, il existe $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\exp(g(z)) = f(z)$.

Exercice 3. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que l'image $V = f(U)$ est ouverte et au voisinage de tout point de V il existe une inverse holomorphe de f .

Exercice 4. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante et $a \in U$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $W \subset U$ de a et un biholomorphisme $\varphi: V \rightarrow W$ pour un ouvert convenable $V \subset \mathbb{C}$ tel que

$$f \circ \varphi(z) = z^m$$

où m est la multiplicité de f en a , i.e. l'unique entier m tel que $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ est holomorphe et ne s'annule pas en a . En déduire que :

- (1) f est une application ouverte ;
 (2) $|f|$ n'admet pas de maximum global.

Exercice 5 (Théorème de Liouville). Montrer que toute fonction entière bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. En déduire les faits suivants :

- (1) Tout polynôme non constant a au moins un zéro complexe.
- (2) Si $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions entières, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|f(z)| < |g(z)|$.
- (3) Toute fonction entière non constante a image dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 (Lemme de Schwarz). On considère une fonction holomorphe $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$.

- (1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|f'(0)| \leq 1$.
- (2) Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 (Inégalité de Carathéodory). Soit f holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D}(0, R) \subset \mathbb{C}$, et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $0 < r < R$, on a

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|z| \leq R} \operatorname{Re}(f(z)).$$

Indication : Si on pose $A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$, alors la fonction $z \mapsto g(z) = \frac{f(z)}{2A(R)-f(z)}$ est holomorphe sur $D(0, R)$ et vérifie $|g(z)| \leq \frac{|z|}{R}$.

Exercice 8. (Automorphismes de $\mathbb{D}$).

- (1) Montrer que les transformations du type $z \mapsto \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, où $a \in \mathbb{D}$ et $|\lambda| = 1$ forment un sous-groupe d'automorphismes de $\mathbb{D}$, agissant transitivement sur $\mathbb{D}$.
- (2) Déduire du Lemme de Schwarz que tous les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont de cette forme.

Exercice 9. Montrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les similitudes.

Exercice 10. Soit $f, g \in \mathcal{O}(D(0, \varepsilon) \setminus \{0\})$ ayant des singularités au plus polaires en 0, de développement de Laurent respectifs $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$. On note

$$v(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} \quad \text{et} \quad v(f) = +\infty \quad \text{si } f \text{ est identiquement nulle.}$$

Montrer les faits suivants :

- (1) Pour f non identiquement nulle on a

$$\begin{aligned} v(f) = k &\iff f(z) = z^k h(z) \text{ avec } h \text{ holomorphe sur } D(0, \varepsilon) \text{ et } h(0) \neq 0 \\ &\iff \lim_{z \rightarrow 0} z^{-k} f(z) \text{ existe dans } \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

- (2) $v(fg) = v(f) + v(g)$ et $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$ avec égalité si $v(f) \neq v(g)$.
- (3) On suppose que f ne s'annule pas sur $D(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Montrer que $\frac{1}{f}$ admet une singularité polaire en 0 et que $v(\frac{1}{f}) = -v(f)$.
- (4) Soit $h: V \rightarrow D(0, \varepsilon)$ un biholomorphisme d'un voisinage de zéros qui fixe 0. Montrer que $f \circ h$ a au plus une singularité polaire en 0 et montrer que $v(f \circ h) = v(f)$.